量子論の発展史

高林武彦

1977刊

量子論の発展史

高林武彦

自然選書

中央公論社

目　次

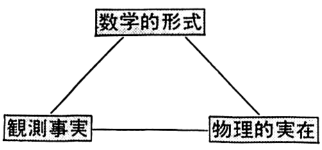
量子論の発展史

第1章 序 説

今世紀の最初の30年は物理学の歴史に特別な時代として残るだろう。この期間に相対性理論と量子論の形成がはたされ、それによって物理学の基礎が根本的に変革されたのである。以来、今日にいたるまでの物理学の多彩な発展は、主としてこの基礎の上にくりひろげられた。ことに量子論は、ひろく現代の物理学や化学において中心的な地位をしめるものである。物質は分子・原子からなり、分子・原子はさらに原子核と電子からなっているが、これらの小さな世界――それらと相互作用するいろんな波長の光をも含めて――を支配している法則をあつかうものが量子論なのである。

この理論は前世紀末以来、物理学がミクロの領域につき進んでいったとき、そこに現われてきたいろんな謎を解くために徐々に創出されてゆき、1930年ころまでに量子力学とよばれる一貫した理論体系にゆきついたのである。出来上がった量子力学はきわめて流動的な論理をもっており、自然法則・自然像に対する常識的な観念をくつがえすような風変りなものである。

量子力学がそれまでの物理学――「古典論」とよばれる――とは根本的にちがった新しいタイプの理論であるというのは、最も一般的にいっ



て次の点にあるといえる。量子力学にあっては、その数学的形式と、実験的に観測される事実および“物理的実在”の三者は、古典論の場合の

ように三位一体的に密着した関係にはない。数学形式は結局ヒルベルト空間のベクトルとか演算子というようなものを用いて表わされるが、それは直ちに個々の観測事実を記述するものではない。数学形式はそれを観測事実に対応づける規定（prescription）を通じて意味づけを得るのであるが、そこに統計的要素が入ってくる。この数学形式と、それを観測事実に対応づける規定とは、合して量子力学の法則あるいは理論体系を構成するわけであるが、それら全体の背後にはなお、その解釈問題というべきものがある。そしてその中心をなすものがこの理論体系と物理的実在との関係であって、これまた古典論の場合のように自明的ではなく、哲学的な性格をおびたデリケートな問題を含んでいる。

古典論の時代からこのような新しいスタイルの理論への歴史的な移行は、当然のことながら一挙にはたされたのではなく、その過程には上にあげた三つの側面がたえず交錯しながら現われてくる。この移行は、もう少し具体的にいえば、概念的にみてほぼ次のように進む。まずプランク M. Planck が空洞輻射の問題を解くために調和振動子について「状態の不連続性」とそれを規定する「作用量子」という非古典的な観念を導入し、ついでアインシュタイン A. Einstein が「光量子」の観念によって光の粒子－波動の二重性のディレンマをつくり出す。さらにボーア N. Bohr が原子内電子について「定常状態」とその間の「量子遷移」という観念を前面におし出すことによって、原子構造とスペクトルとの問題にとりつく。この遷移のおこる頻度に関して「遷移確率」という量を導入する必要が生じるが、この量の解釈を「対応原理」にそってつきつめていくとき、物理法則の究極的な非因果性・統計性をみとめる観点が入ってくる。さらに一方では、定常状態にある原子内電子について「軌道運動の否定」というラディカルな立場、他方では「物質波」というファンタスティックな観念が登場するに至る。それらを背景として、一方で「行列力学」、他方で「波動力学」が構築され、ついで両者が「確率振幅」の概念を媒介にして統合される。さらに粒子の位置と運動量の間の「不確定性関係」とか、粒子性と波動性の「相補性」、観測による状態の「非因果的変化」などをみとめ、古典的な概念からいっそうはなれ

ることによってはじめて理論の首尾一貫した解釈がはたされることが認識されて、ようやく一段落をむかえることになる。このような進展が多くの実験的発見とその分析によってうながされ、かつ新しい数学形式の発展にともなってはたされたものであることはいうまでもない。

量子力学をもたらしたこのような変革の過程は相対性理論の場合よりもはるかに複雑であり、トータル（全面的）なものといわねばならない。理論の形成は、相対論の場合には本質的なところはほとんどアインシュタイン一人でやられた[(1)]といってもあまり言いすぎでないのに対して、量子論の場合はそれぞれちがった個性をもち、ちがった発想をもった研究者——その主役だけでもほぼ10人を数え、その一人としてアインシュタインを含む——のそれぞれの本質的な寄与を積み重ね、嚙み合わせることによってはじめて出来上がったという事実も、そのことを反映している。このような量子力学を達成するためには、当然それぞれの段階で根本的・哲学的にものを考える必要があったが、アインシュタイン、ボーア、ハイゼンベルク W. Heisenberg がそういう面でとくに指導的な役割をはたした。プランク、シュレーディンガー E. Schrödinger、パウリ W. Pauli らにしてもやはりそれぞれに哲学的であるが、他方ゾンマーフェルト A. Sommerfeld のように、むしろ技術的な面で職人的な腕をふるうことを本分とした人もある。また独自のイマジネーションで量子力学への端緒をひらいたドブロイ L. de Broglie があり、独得な思考様式とアルゴリズムではなれ業を演じ量子力学の本領をとらえ、これをめざましく展開したディラック P. A. M. Dirac があるかと思うと、またボルン M. Born のように、どちらかというと常識的であるが、若手にまじってその老巧を発揮しやはり本質的な寄与をした人物や、エーレンフェスト P. Ehrenfest のように座をとりもち、アニメーターとしての仲介的役割をもって任じた人物も登場する。

いずれにせよ、量子力学の形成過程の総体は一つの大きな歴史的コン

---

(1) もちろんローレンツ H. A. Lorentz、ポアンカレ H. Poincaré、ミンコウスキー H. Minkowski の寄与も重要である。

プレックス（複合）である。それでも今日の素粒子論のようなものの進み方に比べれば、そこにはなお牧歌的な雰囲気も残っているのである。次章以下でわれわれは、量子論の歴史的発展について、理論の形成自体に中心をおき、しかもそれをなるべく材料を節約した簡素な形でのべ[(2)]、量子論を創造しそれを現実におし進めていった主要な契機、物理的アイディア、指導原理、それらの発生・連関・交錯を明らかにしてゆきたい。そのさい、各発展段階において成功した側面だけでなく、困難・矛盾・限界の側面についても批判的な考察をほどこすことが必要である。なぜなら、それは次の展開の動因となり、それを条件づけるからである。

歴史にあっては、どうやって未知のことが発見されたかということがまず問題となる。ある発見についての最初の仕事は、多くの場合、論理的に完全でなく、またしばしば偶然的な要素もはたらくが、オリジナルな考えが創出されたさいの方法をうかがわせる意味では、その後の洗練された論文よりも教育的なことが多い。他面、ある研究者が新しい発見に達するさいの推論や理解の仕方、あるいは意識は、理論がさらに体系づけられたときに、そのなかでその推論や理解がどのように位置づけられるかということと区別せねばならない。したがって発展の構造をとらえるには、この両面をともに示し、その間の関係を明らかにしてゆかねばならないのである。それによって、個々のすぐれた仕事の発見のプロセスがそれぞれにきわどい独得のルートをとっているということがいっそう強くわれわれに迫ってくるのである。いかにしてその研究者がその新しい理論を出すことが可能であったかを納得し、その新しい発見をするときの真のむつかしさと真のやさしさとを実感できるところまで分析を深めることが歴史的研究の一つの目標であると思う。

量子論の形成史はそれ自体として重要な意味をもつことは明らかであるが、それは同時に量子力学の意味を真に理解するうえでも欠かせないものである。かつまた量子論の形成過程は、そのなかに種々のちがった タイプの考え方やアプローチを含み、物理学にとって方法論的な宝庫の

---

(2)　したがって本書では実験的研究の叙述は最小限にとどめている。

観を呈し、それ以後、現在にいたるまでの理論の発展に示唆と影響を与えつづけており、この意味からも重要である。

この章を終えるにあたり、なお次の二点にふれておくのが適当であろう。一つは量子論の形成の源となった主要な問題領域に関することであって、次の四つがあげられる。

統計熱理論

輻射（光・X線）とその放出・吸収・散乱の問題

原子内電子の運動

荷電粒子の散乱と物質波

これらの主題は相互に密接に関連している。このほかにも元素の周期律、磁性、原子線・分子線の実験、原子核と放射能などいくつか重要なテーマがある。ただし、すべてにわたって網羅的にのべることはわれわれの目的ではない。

第二は時代的な区分の概観である。量子力学の形成は、今世紀初頭以来の約30年間というかなりくっきり限定された——しかも一世代に相当する比較的短い——期間に行なわれたわけであるが、この期間はさらに次のような段階を通っている。

まず夜明け前ともいうべき19世紀末期の時期がある。そこでは量子の発見につながるものとして、多くの新しい実験事実が準備されたほか、ボルツマン L. Boltzmann やヴィーン W. Wien、さらにはプランクの理論的研究が重要であった。そして1900年末プランクが熱輻射の問題に量子を導入したとき、量子論の時代がスタートする。やがてアインシュタインの光量子概念や固体比熱の理論が出、以来、量子がようやく他の領域にも侵入しはじめるが、同じ時期に他方ではそれと並行して原子の構成も解明されていって、ついにラザフォード E. Rutherford の模型に到達し、両々あいまってボーアへの道が準備される。1900年から1912年にわたるこの時期は量子論の揺籃期ないし幼年期であり、量子と光量子という種(たね)が統計熱理論と光と物質の相互作用の領域に蒔かれたが、まだなんらかまとまった「量子論」とよばれるほどのものが形成されたと

はいえないような段階である。

次の10年間（1913—22）は量子論の少年期に相当し、量子が定常状態と遷移の観念にもとづくボーア－ゾンマーフェルト理論という形に一応収められ、さらにそれがボーアの対応原理で補強されて「前期量子論」とよばれる一つの小ぢんまりしたまとまりをもつようになる。それにもとづいて展開される原子構造とスペクトルの研究が、いまや量子論を育成していく主たる培養基となる。一般的にいって、この前期量子論は古典論と量子の観念との折衷であるが、量子力学に到達するためには、このような中間段階を媒介にすることは歴史的に不可避であった。この時期は第4章であつかわれる。

さて1923年ころから前期量子論の内面的な矛盾が激化し、またコンプトン効果の発見にともなって光の二重性の謎が深まり、理論は革命前夜ともいうべき過渡期に入る。ドブロイの物質波というような新しい観念が登場し、他方ではパウリの排他律が認識される。そして1925年のなかごろになると、ハイゼンベルクの新理論と電子スピンの発見とによってシュツルム・ウント・ドラングの時代が開幕する。シュレーディンガーの波動力学、ディラックの変換理論、ハイゼンベルクの不確定性原理等々がつづいて量子力学が建設され体系化され、その物理的解釈もついにはととのう。同時に、この新理論——スピンと排他律を統合した量子力学——にもとづいて、それまで神秘的であったさまざまの実際問題もにわかに解明されはじめる。この期間（1923—27）は量子論史のクライマックスであり、これほどの短期間にこれほどたくさんの本質的な進歩がはたされたことは物理の歴史にも未曽有である。それは量子論の青年期であり、そのうちの前半期が第5章と第7章で、後半期が第6章と第8—12章であつかわれる。

1928年以後、量子論は成年期に入る。いまや、それは原子・分子・物性・化学・原子核・素粒子等々の多方面へ適用され、それとともに量子力学自身にとっても本質的に重要なさまざまの新たな発展が開始される。ことに相対論的量子論、場の量子論の展開がそれである。場は無限大の自由度をもつ力学系を意味し、場の量子論の形成は量子力学自体の階層

的構造をもたらしつつ量子力学の枠と適用範囲を飛躍的に拡大する。そして量子力学は相対論と合してますます極微の世界をさぐっていくうえに有効に働くことが立証される。この理論は「発散の困難」といわれるような種々の問題点をはらみながら、今日まですでに長い発展を経過している。この量子論の成年期の初期——それはなお量子力学形成時の黄金期の余光をともなっているのだが——については第12章以下でのべるが、それ以後の発展については第14章の最後で簡単にふれるにとどめる。

第2章　古典論の困難

§2·1　原子論

量子論の出現の一般的動機は、前世紀までに出来上がって働いていた理論——すなわち古典論——が世紀末期からミクロの問題に関連して破綻を呈しはじめたということにある。まず、その次第を簡単にみておこう。

われわれが直接観察するようなさまざまの自然現象——それは原子・分子というようなものに比してはるかに大きな世界のものであるからマクロの現象という——が、どのような法則にしたがっているかということは、前世紀までに基本的に明らかにされた。すなわち、それはニュートン力学とマックスウェル電磁気学および熱力学を根幹とするものであって、これらによって一つのかなりまとまった理論の体系（古典論）が構成されたのである。

しかし人々は、マクロの現象をマクロの現象として認識するだけで満足するわけにはいかなかった。なぜなら、このような立場にとどまる限りは、いろいろの現象を相互の論理的関連をもたないばらばらのものとして受け取るほかないような部分が、理論のなかに残ってこざるをえないからである。なかんずく、それぞれの物質がなぜそれぞれの特性を示すのかを、必然的なものとして理論のなかから理解することができない。

このような点をもっと突っ込んで説明し、いろんな現象いろんな物性のあいだにつながりをつけるためには、マクロな物質に、直接目に見えないような微細な——いわゆるミクロの——構造を想定してゆくほかないであろう。このようなものとして古くから考えられてきたものが物質の原子論である。それは一見連続的に見える物質に微細な不連続的な構

造を考え、物質はおびただしい数の分子・原子からできていて、それらの運動と機能の総括的な効果がマクロの現象として観察にのぼるのだと考えるものである。すると問題は、第一にこれらの分子・原子自身がどのようなものであり、どのような法則に従い、相互にどのような相互作用をもつかということ、第二にこれらの集まりに統計的な方法を適用して、この集まりの全体として示すべきマクロな性質を導きだすこと、そしてそれが実験事実と一致するかどうかをしらべることである。

ところで、これらの分子・原子などのミクロなものの従う法則については、じつは、あらかじめなんともいえないはずである。しかし、法則というものはなるべく普遍的なものであることが望ましいわけであるし、そして従来の古典論というものが普通の地上の現象と同様に、天上の巨大な尺度の現象にも当てはまるということからして、逆に外挿して原子のようなミクロのものの行動にも古典論が当てはまるだろうと考えることは一応自然な考え方であろう。ことに自然法則の適用限界についての意識が希薄であった時代に、そう考えられたのは不思議でない。こうして原子論は古典論の胎内において成長することになったのである。すなわち原子は、なんらか普通の物体を単に連続的に縮小したようなものであり、それがニュートン力学に従って飛びまわったり、アンテナが電波をうちだすのと同じ法則に従って光ったりすると考えられたのである。

このような方法は、まず気体の場合について、その力学的・熱的な諸性質（状態式、比熱、粘性など）を導きだすのにかなりの程度に成功した（「気体分子運動論」）。じつは原子・分子はむしろ化学のほうで生長してきた観念であったが、いまや分子運動論によって分子の数や大きさをきめることができるようになり、分子・原子はより現実的なものとなってきたのである。のみならず、統計的・確率論的立場で熱力学の一般概念（温度、エントロピーなど）、一般法則そのものを基礎づけることができた。そのさい基本的なものは、エントロピーSを確率の対数と同定するボルツマンの原理

$$S=k\log W \tag{2-1}$$

である。ただし、この「確率」(熱力学的重率)の定義を明確にし、それを正しく算定することについてはいろんな問題点が含まれていた。

今世紀に入ってから、上述のような総括的・平均的な効果のみでなく、それからの「ゆらぎ」を意味する現象(ブラウン運動など)が解明されるに至り、分子・原子の実在はもはや疑う余地のないものとなった。

ただし、このような成功は、半面において同時に若干の困難をともなっていた。たとえば二原子分子からなる気体(水素、酸素など)の比熱について、その実測値が理論の予測と食い違うということが早くから気づかれていた。

あるいはボルツマンの原理(2-1)に従って統計力学的に考えるとき、Wが位相空間の体積というような次元をもつことに関係した不定の付加常数がSに存在すること、また気体のエントロピーが示量的(extensive)な量にならないこと(ギブス J. W. Gibbs のパラドックス)なども問題である。

§2・2 電子論

次に、同様の立場で物質の電気的・磁気的な性質、ことに光学的な性質を導きだそうとすると、単に物質の分子的・原子的構造を考えるだけでは不十分で、原子自身がさらに電気的な内部構造をもつ——具体的には原子がそのなかで動きうるような「電子」と呼ぶ非常に軽い荷電粒子を含んでいる——というふうに考えを進める必要が生じてきた。ローレンツらは、このような電子的構造にもとづき、電子に対しては真空中の荷電体に対するマックスウェルの理論をそのまま適用して、物質の電磁気的・光学的性質を説明するのに相当の成功を収めた。だが、それは同時に、むしろより多くの困難を生み出す結果になった。

たとえば、この理論は分散や(正常)ゼーマン効果、あるいは反磁性の説明において成功を収めたが、原子スペクトル自体において見出される規則性(バルマーの公式など)を説明することはできなかった。またドルーデ P. Drude らによる金属の自由電子ガス模型は、電気伝導と熱伝導の比に関するヴィーデマン-フランツ Wiedemann-Franz の規則

を説明することはできたが、電気伝導自体の値や比熱などについて困難を生じた。

これらの問題における困難の由来を分析することは、原子の内部構造がどのようなものであるかという問題がからみあっているので複雑である。だが、このような困難はきわめて根深い一般的な性格のものだということが重要である。古典論によれば、原子は——少なくともそれが荷電粒子からなり、電気的な性質の力のみによってまとまっているとすれば——不定な（すなわち一定の性質をもちえないような）ものになり、おまけに不安定なものになって、原子内における電子の運動のエネルギーがまわりの真空中に吸いつくされてしまう（§4·1 参照)。真空自身は無限大の比熱をもつ（§3·1 参照)、物質の磁性は熱平衡において結局ゼロである——等々といったぐあいである。

このような困難の局面が発展し具体化するにつれて、従来の古典論をそのまま原子や電子に適用するというやり方自体に徐々に疑惑がきざし始めた。(1) 古典論は本来マクロの現象についてたてられたものであって、それが原子のようなものにも当てはまるかどうかは、同様の意味で検証されているわけではない。ことにこれらの問題では——「原子論」の場合のように分子・原子というような、まだ比較的重いものの全体的な運動ではなくして——電子というずっと軽いものの運動、さらにそれと光の場との相互作用が問題になってきているという点が注意されねばならない。(2)

しかし、いずれにせよローレンツの電子論は——ボルツマンの統計力

---

(1) 実際には古典物理学は長い伝統をもっていただけに、一般の物理学者たちはかなりの意識の遅れを示した。前世紀の終わりごろまではむしろ、本質的に物理学の基礎は明らかにされ、物理学者の仕事は測定の精度を上げていって細かい効果をしらべることにあるといった自己満足が一般には根強かった。このような意識を打ち破ったのは若いラザフォード、アインシュタイン、ボーアらであった。他方においてポアンカレが物理学の危機を唱えた。

(2) このような問題で一般に古典論の破綻がずっと著しいのは、のちに見るように、電子を古典的な粒子とみなすことも、光を古典的な波とみなすことも不十分だからである。

学とともに――やがて登場する新しい理論（量子論、相対性理論）の背景を提供するものであった。

§2・3　新しい放射線

とにかく原子・電子などの導入によって諸現象をより統一的に説明する道が開かれ、そのかわり理論は直接の経験から遠ざかった基礎に立つようになってきたようにみえた。ところが、あたかもそのころ、電子や原子がより直接的な観察に姿を現わしてきたのである。世紀の大詰にいたって、なんらか物質から発して空間を高速で飛ぶエネルギーの種々の新しい形態――このようなものとして従来は光のみが知られていた――が、矢つぎばやに登場した。真空放電管における陰極線、陰極線のあたったところから出るX線、ウラニウム・ラジウムなどから自然に出る放射線（α線・β線・γ線）などが芋づる式に発見されたのである。

これらは実験的には、むしろある程度相互に同質的なものとして現われてきたのであり、光とともに放射線という言葉で一括していいようなものであった。しかし、その正体を理論的に考える場合、古典的な概念に従うかぎり、それが粒子か波かという区別は"そのいずれか"であるべきであり、この分類が進められた。これらは原子の崩壊の産物ともいうべきものであって、あるもの（陰極線・β線）は原子の構成要素として想定されつつあった荷電粒子としての電子であり（トムソン J. J. Thomson)、あるもの（陽極線・α線）は原子から電子をもぎとった残余としてのイオンであり、またあるもの（X線）は波長の極度に短い光と解すべきこと（ラウエ M. von Laue）が漸次確立していく。(3)

こうして原子のかけらとおぼしきものが発見されてくると、そこにおこった動きの一つは、それらを素材として原子の模型を設計するという

---

(3)　じつは、これらの"放射線"について粒子か波かを決定することは元来簡単なことではなかった。陰極線についても長く対立的な解釈があったが、真空度が上がって陰極線が静電場で屈曲することが確認され、その e/m が測られるに及んで粒子説が確立した。X線についても――アインシュタインの光量子説は別としても――ブラッグ W. H. Bragg らは長く粒子説をとっていた。

試みである。一般に原子に内部構造を想定する考えは、いろんな元素に対応するそれぞれの原子がそれぞれの特有な化学的性質をもっているという事柄を説明する道を開くためにも避けがたい進路であった。とにかく、いまやトムソンの模型と長岡半太郎の模型とがあいついで提出される（1904）。当時、ゼーマン効果に対するローレンツの理論の成功からして、原子内になんらか電子が束縛されており、これが原子スペクトルの原因になっていることは確かになっていたが、原子内陽電荷の正体について直接的な手がかりがまだ乏しかった。この点に関して両模型は対立的な見方をとる。トムソン模型は、一様に拡がった陽電荷の球のなかに電子を閉じ込めるもので、電子が適当にリング（環）状ないし殻状に配置された状態を考える。この陽電荷の径は、ボルツマンが気体運動論で想定したような原子の大きさを代表している。電子が陽球のなかにかくまわれているので、モデルは全体として力学的に安定である。そもそも原子模型は原子に課されるはずのいろんな性質を説明するようなものであるべきだが、そういう性質として化学的性質のほか、原子スペクトル・磁性・放射能などいろんなものがあり、すべてを統一的に説明するようなモデルはそうたやすくつくれるものではない。トムソンは、電子の数が順次ふえていった場合について電子配置とその力学的および電磁的安定性をしらべ、それにもとづいて元素の周期律を説明しようと試みた。

他方、長岡はトムソンの陽球を大きな質量をもつ芯でおきかえ、電子をその外へ追い出し、この電子が環状にならんで回転しているという、より動的な模型を考え、それによってスペクトルと放射能を説明しようとした。しかし、この模型は力学的安定性などに関して困難があるため、トムソン模型のほうが有力なものとみなされた。なおトムソン模型では、電子は平衡位置の付近に準弾性的に束縛されることになるので、光の分散やゼーマン効果に関するローレンツの成功をそのまま受け継ぐという利点もある。

電子線やα線やX線が生産されるようになっておきたもう一つの重要な動きは、従来の光（赤外線・可視線・紫外線など）と物質との相互作

用の諸現象とならんで、これらの“線”と物質との相互作用をしらべ分析していく新しい型の実験が開始されたことである。たとえば電子線を気体のなかに送りこむと、気体の分子・原子によって単に通路を曲げられる（弾性散乱）場合のほかに、そのさい、なにがしかのエネルギーを原子内の運動に与える場合（非弾性散乱）もある（その例としてフランク－ヘルツ Franck-Hertz の実験については§4・1参照)。このエネルギーが十分であれば、原子中の電子をほうり出す（イオン化）こともある。あるいはまた電子が速度を失ってしまって、分子に付着するということもおきうる。このような電子線をもってする実験は、レナルト P. Lenard 以来次第に広範に推進された。同様にα線をもってする散乱の実験はラザフォードのグループによってなされた。またX線を気体のなかに送りこんだときも、気体の分子・原子によって吸収されたり散乱されたりする。吸収されるさいには、分子中の電子をはじき出してイオン化する（光電効果)。このような実験は J. J. トムソンやバークラ C. G. Barkla によって進められた。

このような実験は原子の内部をプローブするという意味をもっており、それらの現象の解析を通じて原子の内部構成は次第にはっきりして、ついにラザフォードの原子模型とよばれるものに結実することになった(1911—13)。すなわち、まずX線の散乱およびβ線の散乱の実験から、原子はその原子量の約半数の電子を含んでいることが推定できた。原子はそれだけの負電気をちょうど中和するだけの正電気をもっているはずであるが、それの正体がα線の散乱の実験からついにつきとめられた[(4)]。すなわち、それは原子自身よりもはるかに小さな1個の重い粒子であって、原子核と名づけられる。電子は核のもつ陽電荷に引っぱられながら、そのまわりを運動しているはずである。ラザフォードの原子模型はこのような有核模型であって、それまで有力であったトムソンの模型に対立

(4) α線が適していたのは、これが高エネルギーの重い粒子であるため、その単一散乱には原子内の電子がほとんどきかないためである。電子はより小さな角度の散乱によって、多重散乱において寄与するだけである。

するものである。

これらの現象の解析には古典論が用いられた。それによって、ともかく原子の内部構成を解明することができたのは、一般的にいえば、本来マクロな現象に当てはまる古典論が、ミクロの現象を支配するはずの（未知の）理論となんらかの連結・対応の関係をもつからである。電子が荷電と質量をもつ粒子であること、X線が短波長の光波であることが確立されたということ自体が、このような古典的な像が当てはまるような現象——陰極線を電場や磁場で曲げるトムソンの実験、X線を結晶格子にあてて回折させるラウエの実験——を通じてであったが、同様に電子やX線（あるいは一般に光）の古典的な像にもとづく分析は、それらと物質との相互作用の諸現象においても漸近的に、また場合によっては正確に、有効な結果を与える場合がありうるし、このような場合を通じて原子の内部構成が明らかにされたわけである。

実際、古典論にもとづいてトムソンが導いた荷電粒子によるX線の散乱の断面積の式にしても、ラザフォードが導いたα線の単一散乱の角分布の式にしても、そういう意味の正当さをもつものであった。（核とα粒子間のクーロン散乱の断面積に関するラザフォードの古典的計算の結果は、のちの波動力学とその確率解釈とにもとづく結果と合致する。ラザフォードの計算で注目すべき点は、彼が古典力学と確率的あつかいを併用していることであり、それはボルツマンが気体運動論において分子相互の衝突による分布関数の変化を計算したさいのやり方にならったものといえる。）

ところで、こうして電子やX線の像や原子の内部構造がいったん古典的なものとして確定されると、§2・2「電子論」でふれたような古典論の破綻が早晩いっそう明確・尖鋭な形をとって再生産されることになる。それは§2・2であげた諸現象においても、この項でのべた諸現象をもう少しくわしく手広くしらべるときにも現われてくる。たとえばX線については、その吸収における光電効果や、散乱におけるコンプトン効果においてその粒子的な性質が現われ、電子線については弾性的な散乱（ラムザウアー効果、結晶による回折）において、その波動的な性質が現わ

れることになる（第7章参照）。

しかし基本的に同種の困難は、§2・2にのべたように、すでに普通の光の場合について、また原子の内的な性質——これは簡単にいえば、核に束縛された電子系の問題にほかならない——をめぐって、より早くから表面化したのであった。そして量子が、世紀末におけるミクロの世界の開拓とは一応無関係に、しかも同じころに熱輻射の問題からはじめて姿を現わしてきたということは意味ぶかいことである（§3・1参照）。

また放射能現象の研究からラザフォードとソディー F. Soddy (1902) は、それが元素の変換、原子の崩壊であることを認識したが、シュヴァイトラー E. von Schweidler (1905) は原子の崩壊の法則は、原子が一定の崩壊確率をもっておきるとして説明されることを示した。これは崩壊がまったく偶然に支配されることを示唆し、単なる古典論の立場では理解しがたいことであろう。しかもいっそう注目すべきことは、α崩壊について寿命が短いほど——すなわち崩壊確率が大きいほど——出てくるα線のエネルギーが大であるというガイガー-ヌッタルGeiger–Nuttal の規則 (1911) が見出されることである。

こうして古典論であつかいきれないような諸現象が登場し、物質のミクロの構造が開拓され、新しい種々の実体が認識されてきて、量子論を必要とする情勢が準備されてきたことは、世紀末期における電気技術を中心とする生産技術の発展——高電圧発生・強磁場発生・真空技術・高温と低温の生産・写真技術等々——と密接な関係にある。しかし、この点には立ち入らないことにする。

なお、電子などがより直接な観察に姿を現わしてきたと言ったのは、電子などが物質から解放されて"線"として飛び出してきて、電場・磁場の作用をうけたり、物質との相互作用をいろいろな形に展開したというだけでなく、そのさいに個々のα粒子や個々の電子を実験的にとらえることが可能になったことをも言おうとしたのである。個々のα粒子や電子が螢光板にあたって閃光を放たしめ、計数管を放電させ、ウィルソンの霧箱にその通路を示すことになってきたのである。そして、ことに霧箱における観察は、電子が粒子であることを如実に示したのみならず、

たとえば1個の電子が1個の原子に衝突して散乱されるというような要素過程を手にとるように見せた。したがって、このような過程をあつかうべき理論（量子力学）の建設に、きわめて重要な実験的基礎を提供することになる。ことに、それはやがては光の粒子性をもはっきり示すことになる。

ここではわれわれは、やがて量子的世界の立役者になるべき電子・X線・放射性物質の線・原子構造（束縛電子の体系）などのもろもろの実体が古典論の環境のなかに姿を現わし、いったん古典的なものとしてその性格を定められつつ、次第に古典論のわくを破るものに転じてゆくさまをスケッチした。しかし、世紀末におけるこのようなミクロの世界の急激な開拓は、歴史的には、それにつづく今世紀最初の10年間に危機意識をもっと広範な形でよびおこしたことを付記しておく必要があろう。原子（原子核）が不易でなく崩壊しうることの認識（ラザフォードとソディー）、電子の質量が速度によって変わることの発見（カウフマン W. Kaufmann)、そして相対性理論と量子仮設等々によって従来の物理と化学の基本的な原理のあいつぐ崩壊・変革がもたらされ、物理学は危機の時代に入った。そして、このような情勢でポアンカレらの「物質は消滅した」というような叫びもおこった。しかし一方では、ケルヴィン Lord Kelvin 以来、目に見えるような模型で考えることに慣れたイギリスの学者たちが中心になって、まさに同じ時期に原子模型を構築していったのであった。(5)

ラザフォード模型の成立は決定的に重要であった。第一に、この有核模型によってラザフォードとボーアが核外レベルの現象（原子スペクトルなど）と核内レベルの現象（放射能など）を明確に分かちえたことは、

---

(5) 大陸ヨーロッパにおける理論物理学的伝統に対して、イギリスではこれを応用数学としてあつかう習慣があった。さらにイギリスではケルヴィンやレーリー Lord Rayleigh の伝統で、エーテルをまったくリアルな物質——しかも宇宙の根元的な物質——とみなす傾向が強く、他方、大陸ではエーテルに対して批判的傾向が比較的強かった。そして後者から量子が生まれたのである。イギリスの物理は原子模型を育てたが、相対論と量子論にはやや立ち遅れた。

次の発展の基礎となる。第二は、この模型がことに深刻な矛盾をはらんでいることであって、これが大きな発展のもとになることについては後にくわしくのべる。

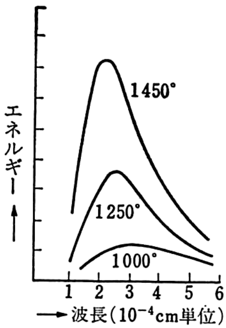
第3章　振動子と量子・光量子

§3·1　空洞輻射とプランクの理論

この章では、古典論が破綻するような問題を通じて古典論に異質な量子の考えが生まれ、徐々に拡がっていった情況をのべる。

すでにのべたように、19世紀末期にはX線・放射能・電子の発見があいつぎ、また分光学や磁性の研究も進んでおり、新奇な世界が急テンポに開拓されはじめた。それらに比べると、同じころ追求されていた熱輻射の強度分布の問題はむしろ地味なテーマにみえた。しかしながら熱輻射論は、〔光学－電磁気学〕と〔熱力学－統計力学〕とを結合するところに生じた問題であって、そのようなところからはじめて量子が認識されたという歴史的事実には、あとでもさらにのべるように深い意味があるのである。かつまた、以後の量子論の展開は、まさにこのような統計熱理論の問題、電子と光の相互作用の諸過程の問題を主軸としてなされることになる。

一般に物体（固体）は相当の温度にまで熱すると赤く光り、さらに温度を上げるにつれて白熱化してゆくことは日常観察されるとおりである。キルヒホッフ G. Kirchhoff はこの問題を純粋化して、ある温度の壁で囲まれた空間（空洞）を問題にした。ここにはいろいろな波長の光がたまって、壁の温度に相当する熱的な釣合いの状態が達せられるはずであるが、この状態では光のエネルギーが各波長 λ（あるいは振動数 $\nu=c/\lambda$）にきまった仕方で分布し、その分布は温度 T（絶対温度を用いる）にはよるが壁の物質の種類などにはよらない普遍的なものであることを、彼は熱力学にもとづいて明らかにした（1860）。以来、このエネルギー密度の分布関数 $u(\lambda, T)$ ないし $u(\nu, T)$ がどのようなものであるか実験



空洞輻射のエネルギーの各波長への分布

的にも理論的にも熱心に追求され、双方の協力により一歩一歩追いつめられていった。

まずマックスウェル理論によれば、輻射はそのエネルギー密度できまる輻射圧を壁におよぼすことからして、熱力学により $\int_0^\infty u(\nu, T)d\nu$ が T^4 に比例すべきことが結論されることをボルツマンが示した。

次にヴィーンは、空洞の断熱変化を考える巧みな推論によって、この分布関数が次のような**スケーリング**性をもつべきこと、

$$u(\nu, T) \propto \nu^3 f(\nu/T) \tag{3-1}$$

を明らかにした。これは「変位則」とよばれる。

ここまでの進歩は、熱力学とマックスウェル電磁気学にもとづいた確かな理論的基礎をもつものであり、実験的に[1]も確証された。ところがヴィーンは、さらに変位則と実測とにもとづき、かつまた気体運動論とのアナロジーによる発見法的なやり方で進んで、分布関数の具体的な表式として

(1) ルンマー O. Lummer とヴィーンは実際に空洞をつくって、それについて測定した。光の速度が波長によらないという特性のおかげで、熱平衡にある空洞内輻射のスペクトル分布の模様はそのまま空洞にうがった小孔からとり出して測れるわけである。

$$u(\nu, T)=b\nu^3 e^{-a\nu/T} \tag{3-2}$$

を提出した (1896)。重要なことは、(3-1) と (3-2) を通じて、ここに早くも $E\sim T\sim\nu$ なる関連とプランクの常数 h に相当するものがしのびこむことになった点である。

一方その数年後 (1900年春) レーリーは、光の波動論と統計力学とにもとづく正統な分布式は

$$u(\nu, T)\propto \nu^2 T \tag{3-3}$$

であるべきことを指摘した。しかし、この式によると、熱輻射の全エネルギーは無限大ということになってしまう。実際、この問題をマックスウェルの電磁気学と統計力学とにもとづいて考えると、ある温度の壁と熱的な釣合いにあるためには、空洞内におこりうべき各波長の光は、その平均エネルギーが波長によらないある一定の値 (ただし温度にはよる) をもつまで生じねばならないが、空洞内にはいくらでも短い波長の光が可能なはず(2)だから、結局この空間は無尽蔵にエネルギーを要求することになる。そうして比熱も無限大になるのである。

ヴィーンらと同じく、ベルリンにあって数年来、熱輻射の問題に理論的に取り組んできた中年の教授プランクは、熱力学の第二法則の立場からヴィーンの分布式の基礎を分析し、この分布式を強く支持してきた。このヴィーンの式は実測とよく合うようにみえていたが、やはりベルリンにあってルンマーとプリングスハイム E. Pringsheim またルーベンス H. Rubens が精密な測定によって、実測は長波長領域でヴィーンの式からずれることを確認するに至った。そこでプランクもついに実験事実の強制に従い、$\lambda T\to\infty$ で (3-3) の漸近的ふるまいをもつように、ヴィーンの分布式 (3-2) を修正した新しい分布式を書くことになったので

(2) 輻射場というものが——粒子の集まりである物質とちがって——本来、無限大の自由度をもっていることのゆえに、この問題で古典論の困難がとくにドラスチックな形で暴露することになったわけである。

ある。

プランクの実際の進み方は、各振動数の光とエネルギーをやりとりして釣合いを維持するための一番簡単なものとして、それと同じ振動数をもつ線型振動子（これは荷電粒子が弾性的な力で束縛されたようなもので、プランクは「共鳴子」とよぶ）の集まりを設定して問題を分析するものであった。物質の schematic（図式的）なモデルとして[(3)]このような振動子の系をとったおかげで、プランクは問題を二つの部分に分かつことができた。第一は、$u(\nu, T)$ と振動子の平均エネルギー $U(T)$ との関係をきめることであり、第二は $U(T)$ そのものをきめることである。

さて、この問題の第一の部分について u と U が比例することは当然予想されるが、彼は古典電磁気学によって計算して、その関係として

$$u(\nu, T)=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2 U \tag{3-4}$$

を得た。次に問題の第二の部分については、彼は直ちに統計力学の“よく知られた”エネルギー等配則を適用することをやらないで、熱力学の立場で考え、しかも最も基礎的な連関はエネルギー U とエントロピー S との間に存在するという彼の従来の信念をまもり、その立場で(3-2)と(3-3)とを折衷するものとして

$$\left(\frac{d^2S}{dU^2}\right)^{-1}=-a\left(\nu U+\frac{1}{h}U^2\right) \tag{3-5}$$

をおいた。これは積分により

$$U=\frac{h\nu}{e^{a\nu/T}-1} \tag{3-6}$$

を与える。これと(3-4)とから、有名な「プランクの分布式」が得られた（1900年10月）。

ここに到達する5年間の研究において、プランクは熱力学の第二法則を確率的に基礎づけようとしたボルツマンの考えを拒否する立場をとり

---

(3) 赤外線の領域では分子の振動スペクトルが寄与しているから、プランクの振動子はそこではより現実的な意味をもっている。

つづけてきたのだが、いま彼の得た新しい式(3-6)を理論的に正当化しようとすると、もはやボルツマンの原理にたよるほかに道がないことを彼は認め、この最後の段階で運命的な回心を行なう。彼は多数の同じ振動子の集まりをとり、こんどは統計力学的な立場で、再び熱平衡においてエントロピーとエネルギーの間にどういう関係が成り立つかを問題にする。つまり、エネルギーUを振動子の集まりに配分する仕方の数としてWを計算し、それからボルツマンの原理 (2-1) によって S を出そうとする。彼はそのさい、Uがはじめあるエネルギー単位εからなるものとしてWを算出し、最後に $\varepsilon\to 0$ にもっていくというトリックによった(これはかつてボルツマン自身が用いた計算上のテクニクである)。ところが、こうして算出したエントロピー関数が(3-5)の意味するエントロピー関数を再現するためには、εを有限のままにとどめておき、かつそれを

$$\varepsilon=h\nu \tag{3-7}$$

ととらねばならないことを見出した。こうなるとεは、もはや計算の方便ではなくて、実在的な意義をもたねばならず、振動子のエネルギーは(3-7) なる「エネルギー量子」からなっていると仮定せねばならない。(4) これが量子の発見である (1900年12月)。

さて、エネルギーが(3-7)によって「量子化」されたが、そのことによってWは実際に数えられるもの(自然数)となり、エントロピーもそ

---

(4) hの値は 6.5×10^{-27} erg·sec で日常的な尺度では非常に小さいが、たとえば黄色の光(振動数約 5×10^{14} ヘルツ)に対し$h\nu$は約 3×10^{-12} erg で、これは常温における熱運動の平均エネルギーに比して二桁ほど大である。したがって、このようなありふれた領域(振動数と温度の)でhの有限性は大きく結果にきくのである。プランク自身は、当時レーリー発散の困難を問題にしたのではなかったが、とにかくhの導入は場の平均エネルギーに対する高振動数部分からの寄与をおさえ発散を防止する一種の収束因子として働いている。なお、もう一つの常数 $k=h/a$ のほうは (2-1) 式に出てくるものであり、気体運動論において R/N として顔を出してくるものにほかならず、統計熱理論を象徴する常数である。じつはボルツマンはいつも R/N で考え、プランクがはじめてkと書いた。

の対数の意味で「量子化」され、それはもはや任意な付加常数をともなわない絶対的な量となったわけで、この点も重要である。

量子的不連続性が空洞輻射のなめらかな連続スペクトル分布（原子の線スペクトルではなく！）に関する一見複雑な統計力学的分析からはじめて認識されたということは、一見不思議にみえるが、よく考えてみるとそうでないことをここで注意しておきたい。第一に、まだ原子の構造がわかっていないような時期にあって、この空洞輻射の問題は原子模型の特性によらないような、純粋で絶対的な——結局は輻射場自体の性質を反映するような——問題であり、輻射場の問題を原子構造の問題から分離することを可能にする問題であったということである。第二に「量子」というような新しい運動学にかかわる観念に達するためには、純粋の力学的問題の追求よりも、（実際にプランクがとったように）熱輻射というような問題について熱力学とボルツマンの原理のような普遍的原理——たとえそれの力学的基礎が変革されたとしても、それ自身としては護持されるような——に対する強い信念をもって進むほうがより有効であったということである。(5)

ここでプランクの分布式をもう一度書いておく。すなわち

$$u(\nu, T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \tag{3-8}$$

これが三つの普遍常数 c、h、k を含むことは、それが輻射の量子論的統計熱理論であることを象徴している。(6)

プランクの分布式というような、最終的には波動場の量子力学にまでつながるようなものが、まさに量子論のしょっぱなに現われることになったことは、彼の仕事を歴史的に特異なものとして位置づける。実際、

---

(5) 後年プランクがみずから語るところによると、彼にとっては熱力学の二つの法則こそ、いかなる情況においても護持すべきものであり、そのためにはいかなる代償もはらわざるをえないとし、量子の導入という“絶望的な行為”にふみきった。

(6) (3-8) に ν^2 の因子が出てくるのはシュテファン-ボルツマン Stefan-Boltzmann の T^4-則の場合と同じく、空間の3次元性によっている。

以後20年以上にわたってアインシュタインらによって(3-8)の意味が繰り返し繰り返し問いなおされ、量子論の進展になんども新たな示唆を与えることは後にみるであろう。またプランクの"魔術的公式"(3-7)についていえば、量子論の以後の全展開はこれから流れ出したというふうにさえみえる[(7)]。大きな発見は、本人の思いおよばなかった遠大な展望をもつものである。

§3・2　量子と光量子

プランクは彼の量子仮設でもって熱輻射の法則の急場を救ったが、この仮設はなにか古典論とは異質な奇怪な不条理なものであり、さしあたり声を大にして言うのをはばかるような異端的なものである。彼はおそらく心中、不安と矛盾を感じつつ、そのご数年量子について多くを語らず、hよりもむしろkのほうを強調している。彼はエントロピーに尺度を与える必要からkとともにhを導入したのであり、量子をそういう統計から独立にミクロの運動法則自体にかかわるものとして押し進めるような観点を抑制し、それが古典論と矛盾することを正視するのを怖れた。

しかし、とにかくこのように振動子のとりうるエネルギーが、したがって、とりうる運動状態が不連続的であるということは、物質構造における従来の不連続性——原子論・電子論——とはまた異なったまったく新しいことがらであり、古典力学・古典電磁気学からの断絶を含意するものといわねばならないだろう。彼の量子仮設は、ν_{mech}なる機械的振動数をもつ振動子にはエネルギーが $\varepsilon=h\nu_{\mathrm{mech}}$ を単位として分配されるということであったが、このことは当然、この振動子による光の放出・吸収が、このεというまるごとの不分割なエネルギー量子をもって行なわれることを意味する。ところで振動子が放出し吸収する光の振動数$\nu_{光}$は

---

(7) 今後の記述でみるように、プランクの(3-7)が種々に読みかえられ、また形をかえていくことにより、量子論の展開の鍵がつぎつぎと得られる。それはアインシュタインの $\varepsilon=h\nu$ であり、ドブロイの $E=h\nu$ であり、また量子条件 $\oint pdq=nh$ である。

$$\nu_{光}=\nu_{mech} \tag{3-9}$$

であるので、振動子から放出された光は

$$\varepsilon=h\nu_{光} \tag{3-10}$$

なるエネルギー量子をもって飛んでいくことになる。

プランクの仮設 (3-7) はまた、振動子が

$$E=n\varepsilon=nh\nu_{mech} \qquad (n=0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{3-11}$$

なる、とびとびのエネルギーしかとりえないことを意味している。このことは、ようやく1906年に至りアインシュタイン、プランクおよびエーレンフェストによって言明された。

さて、プランクの仮設をさらに論理的に追求するならば、このような不連続性が物理全般に波及するおそれを生じる。振動子のエネルギーがとびとびの値しか許されないとすると、この振動子に他の電子なり原子なりが衝突して、そのために振動子の状態が飛躍したとすると、エネルギーの保存則を認める限り、電子なり原子なりのエネルギーも同時に、振動子のエネルギー変化をちょうどつぐなうだけ、飛躍せねばならぬだろう。こうして、たとえ電子や原子自身は連続的にあらゆるエネルギーの状態をとりうるとしても、飛躍的な変化というものはこれらについても認めなければならなくなろう。つまり、とびとびの状態という新しい考えが振動子という一点においてとり入れられると、それは振動子と相互作用するあらゆる系に状態の不連続的な変化を要求することになってくる。

しかし、もとより当時このようにストレートに考え方が進んだのではない。まずプランクの奇妙な仮設が本当に不可避なものであることを人人が受け入れるまえに、なお多くの理論的分析や実験的傍証が必要であったのである。それどころか、プランクの理論が出された時点においては、それの含意している新奇な性質にあまり注意は払われず、かくて「量子」は数年、一種の仮眠と reticence のなかに保たれたのである。

この数年はアインシュタインが成年に達するのを待つ猶予期間のようなものであった。

量子のもつ危険な意味をまず初めに感づいたのはローレンツ (1903) であった。彼はドルーデの金属の自由電子ガス模型にもとづいて、金属と熱輻射の平衡を考えて、長波長領域についてレーリーの分布式を得たが、そのさいプランクの分布式に言及し、その量子仮設をいぶかった。(以来ローレンツの熱輻射の問題に対する長い苦闘がはじまる。)

プランクの量子の発見はあまりに時代に先んじたものであったが、1905年になると、それは時限爆弾のように反応をおこしはじめた。一方でレーリーとジーンズ J. H. Jeans がマックスウェル理論にもとづく熱輻射の正統な分布式として再び (3–3) をあげプランクの理論を批判したが、同時に古典論が破局に導くことも意識した。他方、当時スイスで特許局の技手をしていた26歳のアインシュタインは光量子の論文を提出して、逆にマックスウェル－ローレンツの理論が究極的なものではなく、ミクロの領域で破れるという観点をうち出した。

プランクの仮設によれば、振動子から放出された光は前にのべたように (3–10) なるエネルギーの量子として飛んでいくことになるが、この量子は、光の波動論の立場を維持する限り、なにか波連のようなものと考えられるだろう。光の波動論はフレネル－マックスウェル以来確固としたものであり、プランクはこれを疑わなかったばかりでなく、その分布式を出すさいにマックスウェル理論にもとづいて出した (3–4) の関係に依存していた。実際プランクは、やがて上記の波連のような見方をするようになった。しかし、これは後にのべるように種々の困難をもたらすものである。それだけでなく、振動子のエネルギーが (3-11) のようにとびとびの値しかとらないと考える以上、光の放出・吸収もまた不連続的におきると考えるほうがそもそも量子の観念にそうものである。アインシュタインは端的に (3–10) の光のエネルギー量子は——波連でなく——局在化した粒子として飛んでいくという描像をとった。つまり彼は、プランクの量子を、振動子からはなれて一人歩きする物理的粒子 (“光量子”) としてとらえなおしたのである。プランクの量子が普通の

アトミズムのいう物質構造の不連続性ではなかったのに対して、光量子は普通の意味のアトミズムに近いわけで、量子を実体的な側面からとらえたことになる。ただし光の伝播というような、波動論ではるか以前に解決ずみのはずの問題に粒子説を再登場させるということは、大胆な考えである。アインシュタインはまた、量子を熱輻射の問題に局限しようとしたプランクとは対照的に、それを他の種々の問題におし及ぼすことに進んだ。これによって量子がようやく動きはじめることになるのである。量子についてプランクは、最初の人間に特有な“怖れ”を抱いていたが、二番目の人アインシュタインは問題を少しちがった角度から見直して、もっとラディカルに進むことができた。ただし、彼の論文の表題「光の発生と変換に関する一つの発見法的観点について」からも察せられるように、彼は光量子の考えを低姿勢で提出している。つまり、それは一つの理論というよりも、むしろ発見法的なアナロジーあるいは“観点”というわけである。(8)

アインシュタインもまたプランクと同様、ボルツマンの原理を支柱として熱輻射の問題をあつかうが、プランクとはちがったアプローチをとる。そこで特徴的なことは、すでにボルツマンやヴィーンがとっていた熱輻射と理想気体の間のアナロジーをさらに徹底して進める点である。彼はヴィーンの分布式が当てはまるような領域について考え、この分布式によって空洞輻射のエントロピーの体積依存性を計算し、(2-1) を逆に使うことによって確率の式を導き、この結果によって空洞輻射と理想

(8) 革命的な論文は拒否反応をよびやすいので、そういうスタイルが配慮されることは別にめずらしくない。アインシュタインのような場合でも、論文はやはりなるべく時代の一般的空気にあうような書き方をせざるをえない（むしろ一般的にいえば、論文の書き方からして、その時代の知的クライメイトが推察されるくらいである)。しかし反面アインシュタインの知的独立性は、彼がこの年の前半の間に矢つぎばやに書いた三つの論文（光量子、ゆらぎ、特殊相対論）のいずれにも顕著にあらわれている。この光量子の論文についていえば、これはもとよりプランクの量子に触発されたものだが、プランクとはできる限り独立な議論の進め方をしており、プランクの導入した常数 k と h の使用を頑固にさけている。しかも、それは1909年までつづく。

気体のアナロジーを具体的にする。すなわち、前者があたかも (3-10) なるエネルギーをもって独立に光速で走る粒子 (光量子) の集まりのようにふるまうことを示す。ただしそのさいマックスウェル理論は、多数の光量子の集まりの空間的・時間的平均のふるまいを記述するものであるという対応原理的な関係を予想する。(9)

この光量子の描像は一見ナイーヴにみえるが、根本的にものを考えるアインシュタインらしい思考にもとづいているといわねばならない。また輻射と理想気体とのアナロジーというものはそれ自身きわめて有力な方法であり、のちに輻射と物質粒子とのアナロジーという形に発展して、量子力学の形成から、さらには場の量子論にまでわたって、一つの大きな指導原理としてくりかえし立ち現われることを後にみるであろう。

さて、光は理想気体とのアナロジーで粒子としてとらえられたが、この粒子が気体の原子などとかなりちがった性質をもつこともはじめから明らかである。それはつねに光速で走り、しかも生成・消滅しうるものである。アインシュタインの光量子説は電子の発見 (1897) につぐ第二の素粒子の発見といってよいものであり、ここにおいて量子はダイナミカルな意味を得て、単なる統計熱理論の枠を出て機能しはじめることになる。

光量子は光の伝播とともに、光の放出・吸収にもかかわる。アインシュタインは、ことに弱い光と物質との相互作用にはこのような光の粒子説によらない限り理解できない面があることに注目した。つまり光が物質におよぼす効果には、光源からいくら遠ざかっても"弱くならない"ような側面があり、それが光量子で説明できる。光の放出・吸収は光量子の生成・消滅という要素過程としてとらえられ、そこに (3-10) の関係が直截に顔を出すのである。

このような要素過程として彼が注目したものの一つは、光電効果の現

(9) たとえばプランクがマックスウェル理論によって導いた (3-4) の関係も、光量子の立場からは平均エネルギーに関して対応論的に成り立つものと再解釈できよう。

象である。紫外線など比較的振動数の高い光を金属にあてると、これから電子が飛び出すことはヘルツ H. Hertz 以来次第に明らかにされたことであるが、レナルト[10]はそのおこり方を実験的にしらべ、次の点を明らかにした（1902）。この効果は、あてる光の**振動数**がある限界値よりも高いときにのみおこり、高振動数の光をあてるときほど、飛び出る電子のエネルギー（速度）は大である。その場合、あてる光の**強度**は単位時間に飛び出す電子の数にきくのであって、個々の電子のエネルギーにはきかない。レナルトは、このような効果が古典論では説明しがたいことも注意した。この場合、飛び出る電子のエネルギーが光の色だけにより、強度によらないということはもとより、そもそも弱い光でも効果がおこるということからして波動論では理解しがたい。波動論では光のエネルギーは連続的に空間に拡がっているのだから、電子を飛び出させるに必要なエネルギーが原子[11]に吸収され蓄積されるためには、それ相当の時間を必要とするはずである。しかるに実験によれば、弱い光をあてる場合でもほとんど光をあてた瞬間から効果がおきる[12]。（普通の光電効果では、金属内の伝導電子が放出されるわけであるが、事情は本質的には異ならない。）

レナルト自身はその独特の原子模型に立って、光電効果ではもともと原子に蓄積されていたエネルギーが、光を受けるとその引金的な作用によって解放され、電子が飛び出してくるのだと考えた。これでは電子のエネルギーが光の振動数とともに増すことを説明できない（この種の説

---

(10) レナルトのすぐれた実験はアインシュタインの発見の一つの基礎になったわけであるが、レナルトは第一次大戦以来極端な国家主義者となり、「理論家・ユダヤ人・平和主義者」アインシュタイン排撃の急先鋒となるのは妙な因縁である。

(11) トムソンも、X線が気体分子をイオン化する場合（これは先にのべたX線光電効果である）について同様の困難に気づいていた。X線は気体を通過するとき、なぜところどころでごく少数の分子をいわば確率的にえらびだして、これのみをイオン化するのかという困難である。

(12) この点については初期の実験で混乱があった。

明がだめなことについては、なお次章参照)。

光をエネルギーの粒の驟雨だとすれば、このような事実が簡単に理解できることは明らかである。光電効果はまさに前にのべた状態の飛躍がおきる一つの場合であり、飛躍的な過程の存在を空洞輻射の場合よりもっと直接的に示すものである。しかも電子が物質から解放された自由な状態へと飛躍する場合であるので、これを直接観測し、そのエネルギーを測ることができたわけである。

光量子のエネルギーは (3–10) 式で与えられると考えられ、電子はこれを吸収して外へ飛び出る。電子が金属の表面をのりこえて外に出るのに、その金属に特有な一定の仕事Pをせねばなるまいということを考慮に入れると、出てくる電子の運動エネルギーは

$$E=h\nu-P \tag{3–12}$$

で与えられるはずである。(3–12) 式の関係が、レナルトの定性的な実験結果と符合することは明らかである。実際、これはレナルトの明らかにした事実 (Eとνとの関係) を素直に最も簡単な実験式にまとめたものともいえる。(13) 光電効果は、個々の要素過程におけるエネルギー保存の式である (3–12) 式がそのまま現象面に現われてくる点において、統計を媒介とする熱輻射の問題よりも簡単であった。

ここで、アインシュタインのこの論文が書かれたころの一般的背景にふれておこう。当時、物質に対する粒子像と輻射に対する波動場という物理学の二元論的性格——より突っ込んでいえば、ローレンツ電子論における電子と (真空中の) 電磁場という二元論——が根本的な問題として意識にのぼっていた。そしてこの問題について勃興していた主流的な見方は、電磁場の理論から荷電粒子の慣性とその運動方程式を導出しようとする“電磁気的世界観”の立場であった。アインシュタインの光量子論はこの同じ問題に関して、それとは顕著に異なる立場をとるものだ

---

(13) しかしアインシュタインの式 (3–12) が簡単なばかりでなく、まったく的確なものであることが実証されるのは10年ほどのちのことである。

ったのである。彼は従来の物理学の二つの構成要素、ニュートン力学の支配する粒子の理論としての物質の原子論と、連続的な波の伝播の考えに立つ電磁場・光のマックスウェルの理論との間によこたわる、深刻な形式上の disparity (異同) を解消することを求めた。彼は、この形式上の対立は、電子・原子と光との相互作用によって光が生滅するような要素過程をあつかうとき現実的な困難をもたらすことを洞察し、こうして光も物質と同様に、根本的には粒子的描像で考えるべしという見地をおし出したわけである。

一方、電磁気的世界観の立場では、電子のモデルの安定性の問題が生じ、ポアンカレ (1906) はこれを救うために凝集力場を導入せねばならなかったが、それはもとの純粋な電磁気的世界観をうらぎることを意味する。これに対しアインシュタインは、特殊相対性理論 (1905) によって力学と電磁気学の対立の他の面を解決すると同時に、電子の構造にかかわる問題を回避して進みうることを示したわけである。いずれにおいても、彼は同時代者ときわだって異なるゆき方をしたことになる。

とにかく光量子論の登場によって、量子の問題の視野が拡大された。すなわち量子を統計熱理論の根底に導入されたものとする見方と、個々の要素過程を制約するものとする見方とが生じ、かつまた、物質的な振動子の運動を制約するものという見方と、(これと関係はあるが) むしろ光の粒子性にかかわるものとする見方とが生じた。とはいっても、光量子説のほうはあまり人々の支持を得ることができず、ましてや、それが従来のマックスウェル理論にとってかわったのではない。(14) アインシュタインの光量子に賛成したのは、さしあたり実験家のシュタルク J. Stark ぐらいのものであった。制動輻射による連続X線の発生は光電効果の逆の過程のようにみえるが、そこに短波長極限が存在するという事実は、フーリエ分解の性質からわかるように波動論では理解できないこ

(14) 光電効果についても、これを古典的な共鳴現象として理解できるのではないかという見方 (ゾンマーフェルトやトムソン) も残っていた。光電効果において時間の遅れがないということは、1913年になってやっと実証された。

とがらである。シュタルクは、これが光量子で理解されることを推察した。

§3・3 量子と光量子（つづき）

量子がプランクの調和振動子において発見されたことは自然なことであったといえる。なぜなら、そこでは「量子条件」(3–11) は等間隔であり、量子がまさにエネルギーの単位として現われるからである。しかも、この場合のプランクの関係 (3–7) が転釈されてアインシュタインの光量子の考えが生まれるようなものであった。一方、プランクの量子を一般化し、力学系の運動状態の不連続性の観念を振動子以外におし及ぼすことはおくれた。

そもそもプランクがそのエネルギー量子を、エネルギーという量とは元来異質と思われる振動数というような量に等置した (3–7) 式はかなり異様なものにみえたが、この点に関してプランクは彼の1906年の著書『熱輻射論』において次の重要な考察を与えた。線型振動子の運動は位相平面内で

$$\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x^2=E \qquad (\omega=2\pi\nu)$$

なる楕円をえがき、これは E/ν なる面積をもつが、(3–11) の条件は位相平面が許される運動を表わすつぎつぎの楕円によって、h なる面積をもつ“素領域”に分かたれることと解される。プランクの常数 h が「作用」の次元をもつものであったことも、この見方では自然に理解される。また古典統計力学では、リウヴィル Liouville の定理とエルゴード仮設にもとづいて位相空間の同じ面積は同じ確率に対応するとしているが、量子仮設はこのことをいわば精密化し、位相空間に h なるスケールを導入し、h なる面積の素領域に1個の状態が対応することをいうものと解することができる。そしてボルツマンの原理 (2–1)、あるいはカノニカル・アンサンブル (canonical ensemble) において系がエネルギー E にある相対確率は $e^{-E/kT}$（いわゆる「ボルツマン因子」）であるということ[(15)]は、量子論でもそのまま維持され、理論が $h\to 0$ で古典論に

向かうことが理解される。さらに E/ν なる位相面積は断熱不変な性質をもつことも次第に人々に認識されるようになる。これらの考察は量子条件の一般化に進むための基礎となる。(16)

プランクはアインシュタインの光量子をゆき過ぎとみたが、後者の特殊相対性理論のほうは他に先んじて認めた。この理論は、はじめから体系的な構成をもっており、プランクの保守主義にも十分支持できるものであった。プランクはみずからその展開につとめ（1906—09)、ことに粒子の相対論的運動方程式を定式化し、かつそれを相対論的不変な作用積分から変分原理によって導いた。彼は作用という量が、一方では作用量子として現われ、他方では力学を支配する最小作用の原理においてローレンツ不変な量（作用積分）として現われるということにうたれ、両方の事柄の間の内面的な関係に思いをこらした。(17)

一方、光量子説の立場からすれば、h は光の波動性を粒子性に読みかえる常数であり、とにかく輻射に関係した常数ということが第一義的とみられることになろう。アインシュタインはしばらくのちに、h が e^2/c と同じ次元をもつこと（$\hbar\sim 137e^2/c$）からして、輻射の粒子性と電子の粒子性との間に内面的関係があるのではないかと憶測し、それらの背後に新しい場の理論を模索したりした。(18)

アインシュタインははじめ熱輻射のヴィーンの分布式の分析から光量子に達したことをのべたが、あらゆる領域にわたって精確な分布式はプ

---

(15) ちなみに、このボルツマン因子を用いる方法で振動子に対するプランクの分布式（3-6）を簡単に導出する今日よく知られたやり方は、アインシュタイン（1907）にはじまる。

(16) 同じころプランクとはまったく別に、ギブスが別の目的で——すなわち非可逆性を理解するために——位相空間を細胞にわけ、“coarse-grained な記述”を考えたことを想起することは興味がある。

(17) この関係は、のちに量子力学に対する（ファインマン R. P. Feynman の）径路積分による定式化のようなもので明らかにされる。

(18) 先にのべたようにアインシュタインは、光量子と特殊相対論とによって同時代者とは顕著に異なる考え方をおし出したのだが、時とともに、場の理論のなかに粒子と量子をあわせ包摂することを求める方向に傾斜していくようになる。

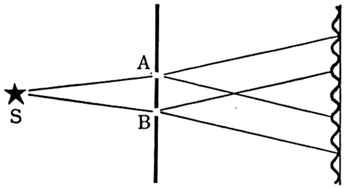
ランクの分布式であるので、この場合にはどうなのかという問題が残っている。そこでアインシュタインはプランクの分布式を用いて熱輻射場の局所的なエネルギーのゆらぎを計算し、これが光の粒子像を意味する項と波動像を意味する項との和で表わされることを見出した（1909）。ゆらぎによるこの種の推論はアインシュタインのお家芸のようなものであるわけだが、彼がここでやったことは、前にプランクが（3-5）式から彼の分布式を見出したプロセスをちょうど逆にたどったことに相当している。とにかくプランクの分布式は量子ということに加えて、光の粒子-波動二重性をも含意していたわけである。

こうなると、光の粒子－波動の二重性はどうしても真剣にとりあげねばならない問題となり[19]、単にマックスウェル方程式が光量子の平均的な時空的ふるまいを記述するといっただけでは解決にならない。アインシュタインの考えた一つの解釈は、電磁場を光量子の存在密度をきめる“幽霊場”のようにみるものである。

そもそも光量子といっても、すでに $\varepsilon=h\nu$ なる関係は、裏からいえば、ε なるエネルギーの光量子には $\nu=\varepsilon/h$ なる振動数の波の性質がともなうことをいっているわけで、$\varepsilon=h\nu$ なる式自身、すでに光の二重性のディレンマを象徴するものといわねばならない。つまり（3-10）式自体が、同じ光について、干渉などの実験をほどこしそれを波動論の立場で解釈することによってきまる振動数 ν と、光電効果などで測られるエネルギー量子 ε との間の関係を与えるものであり、干渉や回折のような波動論に特徴的な現象を光量子の立場でなんとか説明できない限りは、たがいに矛盾する二つの理論の間に対応をつけるものとみなすほかないものである。

光量子間に相互作用を適当に考えることにより、干渉や回折をたくさんの光量子の統計的な効果として説明する可能性をアインシュタインは予想した。しかるに、非常に弱い光を用いてヤング T. Young の干渉

（19） むかしニュートンは光の粒子説をとったが、それと光の波動説の融合にもつとめた。



ヤングの実験。光源Sから出た光が二つのスリットA、Bを通ってつい立ての上に回折縞をつくる。

実験をやってみた場合にも、普通の場合と同じ干渉縞の写真（光が弱いから長時間露出する必要がある）が得られることをテイラー G. I. Taylor は確かめた（1909）[20]。

これは上記のような予想を裏切るものである。なぜならこの場合1個の光量子が走り終わって吸収されてしまってから次の光量子が飛び出る程度に弱い光を用いたのだから、たとえ光量子の間に相互作用があるとしても、それがきいてくるはずはなかろうからである。

穴が一つのときの回折のパターンは、光量子の流れがなんらかの理由で統計的に散乱されるのだと考えることにして、穴が二つのときの干渉縞は、光量子論では、単におのおのの穴による別々の回折パターンの強度分布をそのまま重ねたものになるはずである。なぜなら各光量子はどちらかの穴を通ってゆくはずであり、かついま光量子間には相互作用を考える必要はないからである。しかるに実際にはもっと別の縞——光が波として二つの穴を通りぬけてから重なったとしたときの強度に相当するもの——になる。こうして光電効果において光の粒子性を認めねばならないとしても、干渉現象では光の波動性を認めないわけにはゆかない。

単純な光量子論のまずい点をもう一つあげよう。マックスウェルの理論で光と静電場は、電磁場の二つの場合として連続的につながるものとして把握されていたのがいま再び分解し、前者には量子性が現われるが後者は純粋の古典論でよいとせねばならない[21]。

---

(20) この実験はのちにも人々によりくり返された。

(21) つまり光量子は電磁気的な作用を媒介するのだが、ただ電磁場の横波の部分にだけ対応する。

とにかくアインシュタインの光量子は光の粒子性と波動性の矛盾を背負うものであるだけに、運動状態の不連続性としてのプランク流の量子よりもより深刻な概念的困難を課すものであり、人々がこれを認めることをしぶる情況は長くつづくことになる。たとえばプランクは、量子の不連続性は光の放出・吸収にさいしてだけおきるのであり、エネルギー量子は放出されると、空間を粒としてでなくマックスウェルの式に従って波連のように進むとみようとしたが、このような考え方は、ローレンツが指摘したように、とくに吸収について困難を含んでいる。振動子に弱い光をあてて、振動子がまだ1個のエネルギー量子を吸収するにいたらない前に、あてる光を自由に切ってしまえるからである。このような困難をさけるために、プランクは「第二理論」とよばれる修正理論を出したりする(1911)[22]。

すでに強調したように、プランクの $\varepsilon=h\nu$ とアインシュタインの $\varepsilon=h\nu$ とは形は同じであるが、その物理的意義は異にしている。前者で ν は振動子の機械的振動数であったが、後者で ν は空間をつたわる波の振動数を意味する。プランクが ε を ν に比例するものとおいたのは変位則の要求からきており、つまりは E/ν なる量の断熱不変性に基礎をもっていた。ところがアインシュタインの $\varepsilon=h\nu$ については、相対論的共変性に支えられるという新しい見方が可能となる。光量子という物理的な粒子はエネルギーとともに運動量をもたねばならない(このことは、光が輻射圧をもつことからも当然要求される)。光量子は光速 c で走る静止質量ゼロの粒子と考えられるので、その運動量の大きさ p とエネルギーとの間には $p=\varepsilon/c$ なる関係がある。したがって

$$p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda} \tag{3-13}$$

である。これは運動量 $\vec{p}$ と光の波数ベクトル $\vec{\kappa}$ の間の

$$\vec{p}=h\vec{\kappa} \tag{3-13'}$$

(22) これは振動子による光の吸収は連続的におこるのに対し、放出のほうはエネルギー量子に達したところで不連続的におこるとするものである。

なる関係を意味する。そしてこれを $\varepsilon=h\nu$ に補うことによって相対論的共変な関係（二つの4元ベクトルの間の関係）となり、相対性原理と調和する（プランク、アインシュタイン)。

§3・4 量子の波及

量子論の初期においては、量子は統計熱理論の基礎に導入されたものという側面が主流をなしたとのべたが、じつはこの方面でプランクの分布式をくりかえし分析したのみならず、量子を新しい分野におし拡げる口火を切ったのもやはりアインシュタインであった。彼はプランクの量子の考えが正しいものであるならば、それは「熱の分子論」に入ってくる他のすべての現実の振動にも当然あてはまるべきであり、そのため、そこでも等配則は破れるはずだと考えた。彼は一定の振動数をもつプランクの振動子の集まりを、そのまま現実の固体に対する粗いモデルとして転用して、固体の比熱の式を出した（1907)。これも彼の光電効果の理論と同様、簡単きわまる理論であるが、ばかにできない。これは固体の比熱が“低温で”デュロン－プティ Dulong-Petit の値からずれて小さくなってゆき、$T\to 0$ では0に向かうことを示す。輻射の問題をはなれて現実的な力学的問題（いまは格子点の付近の“原子の振動”）に量子をもちこむ端緒をひらいた意味においても、この仕事は重要である。

同じころ物理化学者ネルンスト W. Nernst は化学反応の平衡常数の研究から、絶対0度に近づくにつれて内部エネルギーと自由エネルギーが接していくという「ネルンストの熱定理」に達していた（1906)。これからさらに、物質の比熱の $T\to 0$ でのふるまいについて結論を得るが、それはアインシュタインの比熱理論の結果と調和するものである。そこでネルンストはベルリンで弟子たちとともに、低温比熱の系統的な測定を実施してこのことを確かめる一方、量子論を熱心に支持するようになった。(23) こうしてアインシュタインの固体論は、それが出されてから2、3年後になって急に脚光をあびるに至った。これにもとづいて固体の比熱が、その弾性的・光学的性質と関連づけられた（リンデマン F. A. Lindemann、マーデルング E. Madelung、サザーランド W. Sutherland

ら)。こうして、いまや固体の問題は、熱輻射について量子に対する強固な支柱となるに至った。かつまた、一般に量子の効果が低温現象で顕著になるということが認識されるようになった。

ネルンストの熱定理は、第二法則では任意なままのエントロピー付加常数が物理的意味をもつことを意味している。プランクはこれを、熱平衡にある凝縮系のエントロピーが $T \to 0$ で0に向かうこととして、よりシャープに定式化した(1910)。この「熱力学の第三法則」が量子論的な本質をもつものであること[(24)]も、次第により明確に認識され、またそれが気体にも適用されるべき普遍的な法則であるという予想はのちの"量子統計"の発見に重要な役割をはたすことにもなる(第7章参照)。

1910年、デバイ P. Debye は輻射場を直接力学系とみなし、これをフーリエ分解することによって、プランクの分布式を最もショート・カットに導いた。レーリーのノーマル・モードは空間に拡がったものではあるが、数学的にそれ自身振動子であることにかわりはないので、それはやはりプランクの量子化(3-11)をこうむると考えるのがこの理論の本質的な点である。プランクが輻射場を振動子の集まりに映しとったのに対して、デバイは輻射場を振動子の集まりと同定したのである[(25)]。こうして物質的な振動子だけでなく、輻射場の成分としての振動子も量子論に投入されるに至った。

原子の内部運動に量子を入れる動きも1910年ころからはじまった。こ

---

(23) 低温物理は同じころライデンで、カマリング・オンネス H. Kamerlingh Onnes によっても開拓されつつあった。すなわち彼は1908年ヘリウムを液化し、1911年超電導を発見した。当時直ちに人々は量子論を超電導に適用することも考えたが、もちろん成功はしなかった(ネルンスト、オンネス、ヴィーンら)。

(24) 第三法則は、基底状態が存在し、かつそれが縮退していないことにもとづく。

(25) 熱輻射に対するこのデバイの描像は「場の量子化」の観点の萠芽であるが、アインシュタインの光量子ガスの描像とも異なっており、それだけでは光電効果などにみられる光の粒子性を説明しえない。両方の描像は、光量子がボース統計に従う粒子であることを考慮するならば、量子力学的には統一されることがのちになって示される。

の場合も原子のモデルの原型になるものはプランクの振動子であるが、これはきまった振動数の輻射しか出さないから、何かもっと複雑な構造を考える必要があるようにみえる。明確な原子模型の確立以前の時期にあって、原子に量子を入れるという野心的な考えをまず試みたのはシュタルクやハース A. E. Haas であった。その場合、一般的にいって原子のメカニズムによって量子をなんらかモデル的に理解しようとする傾向(たとえばハース、のちにはトムソン)と、むしろ量子の働きの結果として原子の性質を理解しようとする傾向とがあった。

とにかく1910年ころには、量子という魔物が中欧を彷徨しはじめた。"物質のミクロの理論の基礎がいまや量子による革命にさらされている"(ネルンスト)ということが意識されだした。こうしたなかで[26]、1911年「輻射と量子」を主題としてブラッセルで第1回ソルヴェー会議[27]が開かれたが、ここでの討論を契機として、量子の仮設の不可避なことが国際的な承認を得るに至った。ゾンマーフェルトは"物理学の将来は量子論にかかっており、ここに輻射論と原子構造論の解明の鍵がある"と予見した。またこの会議から帰ってすぐポアンカレは、その絶筆的論文で熱輻射の合理的な分布式はエネルギーの不連続性を仮定しない限り得られないことを証明した。こうして量子はようやく学界に根をおろした。といっても、量子の正体はいぜん謎であった。

固体の低温比熱の測定が進むにつれて、もとの極度に単純化されたアインシュタイン模型の改良も要求されるようになってくる。それはデバイとボルン-カルマン Born–Kármán によって、ほとんど同時に与えら

(26) なおこの年には、前にものべたようにラザフォードの原子模型が成立したこと、同じころウィルソン C. T. R. Wilson の霜箱に α 線や電子などの飛跡が観察され、ラウエがX線の回折に成功したこと、オンネスの超電導の発見など、物理学の発展における記念すべき一時期である。

(27) 化学工業で成功したベルギーの富豪ソルヴェーは、自分の道楽の物理研究を評価してもらいたがっていたが、ネルンストはこれをうまくもっていって、世界の最高級物理学者の会議を開催させるようにしむけたわけである。議長は物理の国際的交流の立役者ローレンツであった。

れた（1912)。ことにデバイは、前述の彼の熱輻射論と同様のあつかいを結晶に適用することによって成功した。すなわち、結晶を連続体のようにみなして求めた弾性波のノーマル・モードのそれぞれを、再び一つの振動子とみて、その運動をプランクの規則で量子化するわけであるが、そのさいノーマル・モードのスペクトルを結晶の格子構造に由来する実際の（有限の）自由度のところで切断するというプラグマティックな方法をとった。こうしていろんな固体の比熱は、それぞれの固体の特性温度でスケールする共通の温度依存性をもち、ことに低温では熱輻射の場合と同様 T^3 で 0 に向かうという結果を得た。前に熱輻射論と気体論の間のアナロジーをのべたが、こんどは熱輻射論と固体論との間にもアナロジーが生じた。

プランク以来、量子は、アインシュタインの光量子を別とすれば、もっぱら振動のなかにとどまっていたが、ようやく他のモードの運動にも入りはじめ、運動状態の不連続性の概念として一般化しはじめる。それにともなって一般的な量子条件の問題がクローズアップしてくることになる。

振動の次に問題となったのは回転である。それも、さしあたり固定軸のまわりの回転という1自由度の場合をとりあげるのである[28]。これは実際問題としては二原子分子の回転に応用される。そのような気体の回転比熱が実測によれば低温で古典値 R から減少していくことはマックスウェルやボルツマンがすでに問題にしていたところであるが、いまやこれは回転状態が量子化により低温で凍結するためとして定性的に理解される（ネルンスト）。さらにこの量子化によって、このような気体の赤外吸収スペクトル（帯スペクトル）も説明される（ビエルム N. Bjerrum, 1912)。

ただし固定軸のまわりの剛体的回転運動の量子化について正しい式を与えたのはエーレンフェスト（1913）であった。振動子の場合は振動数

(28) じつは、やがて現われるボーアの水素原子の理論も1自由度とした回転の量子化の一つのケースになっている。

νはきまっており、振幅aが変数で、量子条件（3–11）すなわち

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2=n\hbar\omega \qquad (\omega=2\pi\nu)$$

は、振幅を $a_n=\sqrt{2n\hbar/m\omega}$ と量子化しているわけである。これに対し剛体的回転では慣性能率Iがきまっており、角速度ωが変数であるというちがいがある。エーレンフェストはプランクの振動子の場合とのアナロジーから、

$$E=\frac{I}{2}\omega^2=\frac{1}{2}nh\frac{\omega}{2\pi} \tag{3-14}$$

なる量子条件をおいた（右辺に因子$\frac{1}{2}$をつけたのは、いまは振動子とちがって運動エネルギーのみをもつという理由による）。これから

$$E=\frac{\hbar^2n^2}{2I} \tag{3-15}$$

を得る。こうしてエネルギーはなお $\hbar^2/2I$ なる単位の整数倍ではあるが、もはや等間隔ではない。ただし（3–14）の量子化は、角運動量Mについて言いなおすと

$$M=I\omega=n\hbar \tag{3-16}$$

となり、等間隔である。

しかし、二原子分子の回転準位について帯スペクトルや比熱の実験結果を再現するには、（3–15）のnを半整数にとる必要があること[(29)]、さらに H_2 のような等核二原子分子の場合には異常が存在することなどが、その後、漸次明らかになってくる。

もう一つ問題になるのは、並進運動である。もしこれも量子化されるのであれば、単原子気体の気体分子運動論も熱輻射や固体の場合と同様に低温で量子効果をこうむることになろう。ザクール O. Sackur とテトローデ H. Tetrode は単原子気体のエントロピーの式に出てくる付加

---

(29) 回転準位が量子力学的には $E=\frac{\hbar^2}{2I}l(l+1)=\frac{\hbar^2}{2I}(l+\frac{1}{2})^2-\text{const.}$ であることを反映する。

常数（“化学常数”）の問題を考えた。彼らはこの場合、並進運動の自由度についても h^f が位相空間の素領域であるという考え方を用いて状態の数 W を勘定し、これからエントロピーを求め、化学常数を

$$C=\log\frac{(2\pi m)^{3/2}k^{5/2}}{h^3}$$

ときめることができた（1911—12）。この並進運動の量子化は、次のようにも説明できる（シェラー P. Scherrer、プランク、1916）。一辺 a の立方体の箱のなかで原子が自由に運動しているとし、いま簡単のため1次元的に考えることにし、原子の速度を v とすると、これは $\nu=v/2a$ なる振動数の振動（ただし運動エネルギーのみをもつ）に相当する。それゆえ

$$E=\frac{1}{2}mv^2=n\frac{h\nu}{2}$$

なる量子条件をおくべきであり、これから

$$mv=\frac{nh}{2a},\qquad E=\frac{h^2n^2}{8ma^2}$$

を得る。この量子化は、原子の波動性を示唆してもよかったほどのみやすい例になっている。なおテトローデが確率 W を算出するにあたって、原子のいれかえの数 $N!$ で割ることによってギブスのパラドックスを避けたことが注目される。このことは、同種原子が互いに区別できないことを考慮に入れたことを意味するが、そのことがはっきり認識されたのはしかし後のことである。

これら個々の場合の量子化と関連して、“量子条件”を一般的な形でとらえようとする課題も追求された。そのために有効なのは、力学の正準形式で問題を考えることであり、また直接量子化されるべき量としてエネルギーとか角運動量のような普通の保存量ではなく、むしろ周期運動の1周期にわたるある定積分に注目することである。

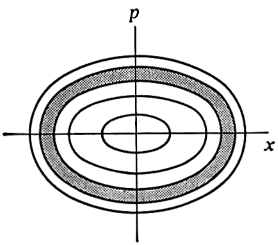
第1回ソルヴェー会議でプランクは、以前の彼の振動子に関する考察を一般化して、

$$\iint dpdq=h$$

の形を提案した。同様に1自由度の周期運動について

$$\oint pdq=nh \qquad n=(0),1,2,\cdots\cdots \tag{3-17}$$

なる形はデバイが書いた（1913）。この左辺の位相積分はのちに「作用変数」Jとよばれるものである。量子条件（3-17）は振動子の（3-11）や回転子の（3-16）などを含んでいるが、この形に書いておけば構造常数は現われず、力学系の特殊性によらない多少とも普遍的な意味をもつものとみなすことができ、かつまた系の構造常数がゆっくり変化しても維持されるような、断熱不変な性質をもつことも予想される。実際（3-17）の左辺の位相積分が、正準変換に不変な量であるだけでなく、断熱不変な量であることは、すでにギブスが認めていたことであった。なお



古典論では粒子の状態は位置xと運動量pによってきまる。すなわちx-p空間（位相空間）の点で指定される。粒子の運動とともにこの点も動いてゆくが、周期運動では閉じた曲線を描く。$\oint pdx$はこの閉曲線の包む面積である。本文（3-17）式の量子条件は、この面積がhの整数倍になるような運動だけが量子論では許されることを示す。図は振動子に対するものである。

（3-17）は

$$\int_0^T 2Tdt=2\overline{T}/\nu=nh \tag{3-18}$$

とも表わされる。

さて一方、光量子の考えの有効性を示す事実はふえていった。光の粒子性はもちろんX線のようにその波長が短いほど顕著であり、X線の“硬さ”といわれる性質はこれを反映している。さきにふれた制動輻射によって発生する連続X線の短波長閾（しきい）については、その後ラウエやブラッグの方法によってX線の波長をきめうるようになってのち、デュエン

-ハント Duane-Hunt の関係が得られた (1915) が、これは光電効果に対するアインシュタインの (3-12) と同様、光量子によって直ちに理解される。また光化学反応についても光量子の考えが当てはまることも早くから注目された。

なお一定の金属について、光電効果におけるEとνの関係を精確に測るということは当時むつかしい実験であった。それは1916年になってやっとシカゴでミリカン R. A. Millikan によってはたされ、アインシュタインの式 (3-12) が確証されたのである。ただし、この段階においてもミリカン自身、このことが必ずしも光量子の実在を意味するものとはみなしていないのである。

第4章　定常状態と遷移

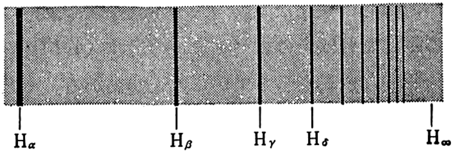
§4・1　ボーアの理論

量子が成長しつつあった同じ時期に、原子模型の構築の試みが追求されていたことは前にのべた。ただし、この試みは、トムソンにしても長岡にしても、古典論の枠内で力学的および電磁的安定性を保証しようというモチーフが優先していた。しかしながら、純粋に古典論の立場で辻褄のあうような原子模型をつくりえないだろうということは、いろんな理由でうすうす感じられた。

そもそも原子が内部構造をもっているとすると、古典論によれば、その内部運動の自由度が比熱に寄与するはずであるが、実際にはそういう寄与がみられない。これはなんらか量子による内部運動の凍結が働いていると解すべきではないか？

さらに注目すべきものとして原子スペクトルの問題がある。いろんな物質をいろんな方法で刺激して光らせ、その光を成分の単色光にスペクトル分解し、その波長を測るところの、いわゆる「分光学」という部門はすでに前世紀のうちに高い技術的水準に達し、豊富なデータを蓄積していた。いろいろのスペクトルのうちで、とくにとびとびの単色光（ただし多少の幅をもつ）からなる「線スペクトル」は自由な原子がうち出すものであることが結論され、それは原子の種類に固有なものである。すなわち観測される振動数スペクトルは光のそれであるけれども、これはなんらか、その光を放つ原子に固有な‘内部振動数’のスペクトルと考えねばならぬものであり、原子の内部をうかがう重要なデータである。

ことに水素原子の発するスペクトルは最も簡単な系列構造をもっており、一見して明らかな規則正しい配列を示す。この各線の振動数が



水素原子のスペクトル

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad \begin{matrix} m=1, 2, \cdots\cdots \\ n=m+1, \ \ m+2, \cdots\cdots \end{matrix} \tag{4-1}$$

なる公式にまとめられることはスイスのバルマー J. J. Balmer (1885) にはじまり、さらにドイツのパーシェン F. Paschen (1908) らによって漸次明らかにされた(1)。他の原子のスペクトルはもっと複雑であるけれども、一般にこの場合も、各線の振動数がその原子に特有なある数列 T_1, T_2, …… の二つのタームの差

$$\nu_{nm} = T_n - T_m, \quad それゆえ \ \nu_{nl} + \nu_{lm} = \nu_{nm} \tag{4-2}$$

として整理されるという事実がリドベリ J. R. Rydberg (スウェーデン) により、さらにリッツ W. Ritz (スイス) によって帰納された (1908)。これは「結合原理」とよばれ、精密かつ一般的に成り立つ。

ところが、このような規則性は古典論では理解できない。ローレンツ電子論では原子の発光は原子内電子の周期的な運動から放たれると考えられ、この周期運動の '基音' 振動数 ν_1 またはその '倍音' 振動数 $\tau\nu_1$ (τ は整数) の光が出てくるはずであるが、これは (4-1) 式や (4-2) 式の関係と異質的である。

スペクトル線がめいめい別々の自由度の単振動から発せられると考えれば、一応事実が記載できる。しかし、もしこの場合、各振動の間の内的関連 (すなわちスペクトルの規則性) を説明しようとして、なんらか

---

(1) 水素のスペクトルは、公式 (4-1) で完全に表わされるという意味で特別な簡単さをもっている。つまり水素のすべての線 (連続スペクトルは別として、また微細構造は無視して) が (4-1) でちょうど尽される。

の力学的な構造のもつ独立な振動のモード（基準振動）のスペクトルをしらべてみると、これは光のスペクトルの示す (4-1) (4-2) のような規則性とは一般的な差異をもっていることがわかる。またこの考えでは、たとえば水素原子にもおびただしい自由度が必要になるが、散乱実験などから原子内の電子の数が原子量の半分の程度にすぎないことがわかってきたことは先にのべた。[2] とにかく古典論の立場で原子スペクトルの規則性を理解しようとする多くの試み（レーリー、長岡、リッツら）はうまくいかなかった。

こうして、なんらかの原子模型に量子を導入し、それによって原子スペクトルを説明しようとする試みのはしりがハースやニコルソン J. W. Nicholson によってなされた。しかしながら、原子スペクトルについて見出されていたバルマーやリッツの規則性、古典論にもとづく分析によるラザフォード原子模型の形成、プランク－アインシュタインの量子概念の進展という――いわば現象と模型と法則の――三本の線の綜合に成功するには、着実な研究とそれにもとづく飛躍とが必要であった。これがボーアによってはたされることになる。

ボーアは、ラザフォードがマンチェスターで原子模型をたてた直後にそこに留学し、この発見によって物理と化学の全般に対して新しい視野が開かれてゆく現場に参画した。ことにα線のエネルギー損失の分析[3]などの研究を行ない、ラザフォード模型を明確にするのに貢献していた。

当時、ラザフォード模型はすぐには広く認められなかったのだが、ボーアはこれを深く信じ、しかも同時に彼だけがこのモデルのもつ内面的な困難にも注目した。彼の意図は、このモデルを展開し、"原子と分子の構成"を解明することであった。分子はたしかに内部構造をもってお

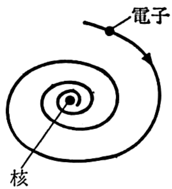
---

(2)　とくに水素は1個の電子をもつのみであるということは、ことに陽極線の実験で2価以上の水素イオンが決して得られないということ（トムソン）からわかる。

(3)　この分析ではボーアは、原子内電子が弾性的に束縛されているとする振動子模型を用いて古典的計算を行ない、それによって有意義な結果を導いている。

り、さらに原子が内部構造をもっていることも明らかになってきたが、そうだとすると化学や気体運動論でわかっているような原子や分子の最も本質的な特徴、すなわちその安定性と同一性ということを保証することは、古典論によってはできない相談であって、不連続な量子にたよるほかはないだろう。

原子模型は一般に束縛された電子の周期的な運動を考える。ところが、じつはこのような周期的運動は、すでにのべたように、古典的にはもともと不定かつ不安定なものである。このことはトムソン模型が支配的だった間はぼかされていたが[4]、ラザフォードの有核模型が成立するに至って、きわめて露骨な避けがたいものとなった。水素原子においては、その1個の電子が核からのクーロン力のもとに、ケプラーの楕円を描いてまわっているであろう。しかし、その軌道の形や大きさは、初期条件が連続的に変わりうることに応じて連続的にさまざまのものが可能である。ところが、さらに電子が周回運動をする以上は、マックスウェルの理論によって光の波を放って、連続的にエネルギーを失っていくことを考慮せねばならない。すると、軌道は速かに縮小して、電子は核に向かって落ちこんでゆくことになる。これらの結果は、原子が一定の安定な大き



さ（気体分子運動論で結論されているような）、一定の化学的性質、およびシャープなスペクトル線をもつという事実と矛盾することであり、きわめて深刻な困難である。このような困難は、原子がまさに古典論とは異なる量子の原理によってその安定性を保証されるのみならず、その発光の仕方を規定されていることを示すものと考えるべきであろう。

---

(4)　じつをいうと、トムソン模型はその陽球を与えられたものとして安定なのであって、陽球自身は他の非電磁的な凝集力が働かない限り不安定である。

ボーアはコペンハーゲンに帰ってからも一人で問題に取り組み、試行錯誤をつづけていた。じつをいうと、彼ははじめスペクトルの問題には関心をもっていなかった。しかしバルマーの公式とリッツの結合原理を知るにおよび、これをたよりに飛躍を行ない、驚くべきスピードでその歴史的論文を書き上げたのである。[5] ときに1913年4月、ボーア27歳であった。[6]

彼は、なるべく簡単な場合として水素原子をとりあげ、しかも円運動に限ることによって、事実上1自由度の運動をあつかう。そしてプランクがヘルツ振動子からの光の放出・吸収について考えた量子論を、この周回電子による光の放出・吸収という、少しばかりより複雑な状況に適合させるやり方で進む。まず彼は“定常状態”という考えを導入する。そこでは電子は単にクーロン力をうけて古典力学に従って運動しており、したがって連続的に輻射を出すことはなく、エネルギーは一定に保たれている。そこでの電子の軌道運動の振動数を ν_{el} と書き、量子条件としてプランクの（3-11）を少しく変えた

$$|E|=\frac{1}{2}nh\nu_{el} \quad (n=1, 2, \cdots\cdots) \tag{4-3}$$

---

(5) このボーアの論文は冗長にみえ、危うくラザフォードによって大幅にけずられるところだった。それは三部作の第1部をなすが、彼の最新のほやほやの結果であり、第2部、第3部はむしろ彼のもとの「原子と分子の構成について」の考察を反映している。

(6) イギリスとドイツの二つの大きな科学的伝統――一方はトムソンとラザフォードによって、他方はプランクとアインシュタインによって代表される――が、この小国において結ばれた。量子論はドイツを中心として発展したが、ドイツをとりまく中欧の諸小国はそれぞれ顕著な寄与をしている。デンマークのコペンハーゲン大学、オランダのライデン大学、スイスのチューリッヒの二つの大学、オーストリアのウィーン大学、そしてスウェーデンのノーベル賞とベルギーのソルヴェー会議など。これらの小国のいくつかでは、「国家主義的自己満足、政治的偏見による科学の歪曲」のような、大国の場合に見られる弊害が少ないという利点がある。コペンハーゲンでは、あるビール会社の大きな寄付が科学を財政的に支援した。

をおく。[7] ところで、いまは振動子の場合とちがって ν_{el} は変数であり、それは古典力学によればケプラーの第三法則に相当する関係

$$-E^3=\frac{\pi^2 me^4}{2}\nu_{el}{}^2 \qquad (4\text{–}4)$$

によってエネルギー E と一義的につながれている。(4–3)、(4–4) から

$$E=-\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (=E_n) \qquad (4\text{–}5)$$

を得る。(4–5) は、準位がもはや等間隔でなく、振動子の場合のプランクの意味でのエネルギー量子の考えが、結果としては成り立たないことを示す。(4–5) はまた、$n=1$ に相当してエネルギーの最低な状態（「基底状態」）が存在することを示し、振動子の場合と同様に安定性が保証されることになる。この状態は、半径が

$$a=\frac{\hbar^2}{me^2}=0.528\text{Å} \qquad (4\text{–}6)$$

の円運動である。[8]

なおボーアは量子条件として、(4–3) のかわりに角運動量 M に対する

$$M=n\hbar \quad (n=1, 2, \cdots\cdots) \qquad (4\text{–}7)$$

をとっても同じであることを注意している。[9] いまMとEは

---

(7) いま運動エネルギー T と位置エネルギー V の間に $T=-\frac{1}{2}V$ なる関係があることから、(4–3) は $T=\frac{1}{2}nh\nu_{el}$ とも書ける。これは (3–18) に合致する。

(8) 次元解析的に考えて、水素原子の大きさをきめるには $\hbar$ が必要であることが納得される。(4–5)、(4–6) にみるように、エネルギーと長さの尺度が $\hbar$、m、e の組み合わせで与えられることは、ボーアの理論が電子の非相対論的量子論にかかわるものであることを示している。$|E_1|=me^4/2\hbar^2=13.6\,\text{eV}$ は基底状態に対するイオン化エネルギーを意味する。

(9) なお、このことから、さらに原子の磁気能率は $e\hbar/2mc$ を単位とすることが出る。これはワイス P. Weiss が以前に (1911) 考えていた“マグネトン (magneton、磁子)”と区別するために、“ボーア・マグネトン”とよばれる。ただし、原子の磁気能率は g-因子のため、これの整数倍とは限らない。

$$|E|=\frac{me^4}{2M^2} \tag{4-8}$$

で一義的につながれていることを考慮すると、(4-7)、(4-8) から再び(4-5) を得る。

ところで、ある定常状態 n にある電子は、突然別の定常状態 n' に移る（“遷移” とよぶ）ということがおき、そのさい

$$h\nu_{光}=E_n-E_{n'} \tag{4-9}$$

できまる振動数 $\nu_{光}$ をもった単色の光が出るという仮設をボーアはつけ加える。(4-9) は光電効果に関するアインシュタインの関係 (3-12), から示唆される。

光電効果は物質による光の吸収の一つの場合であるが、普通の光の吸収では電子が飛び出ない場合のほうが一般的である。しかし、その場合も電子が光のエネルギーをもらってなんらか状態の変化をこうむるだろう。ただ電子が飛び出さないので、直接的にこの変化をしらべることはできないが、本質的には光電効果と異なるものではないから、やはり状態の飛躍的な変化がおこることが予想される。そして吸収の逆である発光についても同様であろう、と考えるのは自然である。そして (4-9) も、この遷移にさいして1個の光量子が出ると考えれば、エネルギー保存の関係を表わすものである。しかしボーアは光量子の概念を慎重にさけ、(4-9) を「振動数条件」とよぶ。もちろん (4-9) によれば、$h\nu_{光}$ は遷移のさい光がもち去るエネルギーであることはたしかであるが、それに粒子の描像を与えないのである。遷移がどのような経過としておこり、その途中で電子がどのようにふるまっているかについて、彼はノーコメントである。

とにかく (4-3) と (4-9) とをおいたことによって ν_{el} と $\nu_{光}$ とが分岐することになった ($\nu_{el}\neq\nu_{光}$) ことは新しい事態である。(10)

もしアインシュタインの光量子の立場をとるならば、遷移は瞬間的なジャンプとしておきるはずだが、それは光の粒子－波動の二重性の矛盾を含むことを前にみた。そこでボーアは単に、いま単色の光波が出ると

いうのである。しかしその振動数はいまや電子の軌道運動の振動数とは異なるから、この光波の出方はプランクのように古典的な機構によるというのでもない。こうして不思議さは増しているが、この点についてもノーコメントであるというのがボーアの理論の特徴である。

とにかく (4-5) と (4-9) とから直ちにバルマーの公式 (4-1) が得られ、かつそこに出てくるリドベリ常数Rの値は

$$R=me^4/4\pi\hbar^3=|E_1|/h$$

で与えられるべきことになるが、このことも精密に実測と一致する。

当初、このボーアの理論は巧妙すぎて、ちょっと本物とは思えないように人々の目にうつったが、なにしろリドベリ常数が見事に再現されるので認めざるをえない。この理論は“定常状態”で光が出ないという考え、また遷移にさいして出る光の振動数と軌道運動の振動数との分岐ということでもって、古典電磁気学の考え方からこれまでよりもさらに一歩はなれることにより、ここに“不思議の国”をつくり出した。

ボーアの理論は、それまでのいろんな発展の線をふまえていると同時に、“未知の国への飛躍”という面をもっている。ただし、そのさい救いとなるのは、彼自身が認識したように、量子条件 (4-3) と振動数条件 (4-9) とできまる $\nu_{\rm el}$ と $\nu_{光}$ は、高量子数の領域 ($n\gg n-n'$) で漸近的に

$$\nu_{nn'}^{光}\approx(n-n')\nu_n^{\rm el} \tag{4-10}$$

なる関係にあることである。このことは、量子論的な光の振動数が古典論によって放出されるはずの光の振動数と漸近的に一致することを意味する。(4-10) は「対応原理」の出発点となる関係であって、これが命

---

(10) ボーアの理論では、作用量子が二重の意味で—— (4-3) ではプランク的な意味で、(4-9) ではアインシュタイン的な意味で—— 入っていることに注意すべきである。振動子の場合には、そのエネルギー準位がたまたま等間隔であったので、(3-9) にみるように $\nu_{\rm el}$ と $\nu_{光}$ が一致し、(4-9) の関係を明白に意識することが妨げられていたわけである。

綱のような役をする。

とにかくボーアの理論によって、水素という現実的な原子についに量子の観念が結びついたということは新しい事態である。ボーア理論は、原子の世界を支配する法則の姿をうかがう最初の橋頭堡をつくったといえる。そして量子力学がなによりもまず原子レベルを支配する法則として発見されるに至ることを考えると、このことは量子力学の形成のために画期的な意味をもつこととといってよい。

また振動子についで、ここに水素原子という量子論の試金石的な問題が登場したということは、量子論の以後の成長に特殊な意義をもつことであった。このモデルは、古典力学的にはケプラー問題としてよくわかっているものと同じであり、したがってこの場合、量子論も具体的にたてていくことができ、結果を実験とあいまいさなく比べることができる。かつまたこの問題は、準位が上のほうでつまっていき、その集積点をこえると連続スペクトルに移行するというような——振動子や回転子とはちがった——特徴をもっている点でも、はなはだ教訓的である。

ボーアの理論は量子論の最初の雛形(ひながた)というべきものを与え、それと同時にスペクトルの解読を一変させるものであったが、それは少し整理してみると、次のような点から構成されているといえる。

(i) 原子のような系はとびとびのエネルギーをもつ定常状態のどれかにあり、その間を遷移することができる。

(ii) 定常状態では、粒子は古典力学に従って運動している。ただし、この定常状態は古典的に可能な運動から適当な量子条件でピックアップされたものに限られる。

(iii) 遷移にさいし光が放出され吸収されるときには、振動数条件(4-9)が成り立つ。

ことに水素原子の場合には量子条件が(4-3)のように具体的に与えられ、(i)、(ii)、(iii)によってエネルギー準位と原子スペクトルが算出された。

しかし、一般の原子・分子の場合は古典的軌道運動が複雑であり、量子条件も明らかでなく、実際にエネルギー準位を算出することは困難で

ある。しかし、そういう場合でもボーア理論は、(i)、(iii)によって、原子（あるいは分子）スペクトルをエネルギー準位の言葉で解釈する枠組を与えるものである。そして振動数条件（4-9）は、$E_n=-hT_n$ とおいてエネルギー準位をスペクトル・タームに同定すれば、リッツの規則（4-2）と合致する。つまり原子の離散的な線スペクトルは、原子のエネルギー状態の離散性の反映である。

こうしてスペクトルの秘密を読みとるための基本的な鍵が――すなわち、それが原子なり分子なりのエネルギー準位の精密なデータのカタログであることが――とらえられたということは、画期的なことであった。いまや分光学（ちょうどその頃はじまろうとしていたX線の分光学も含めて）における豊富で精密なデータの蓄積を原子の探究のために駆使する道が開かれた。そして原子構造論と量子論の成長のために、分光学という膨大な実験的沃野をもったということは、このうえもなく有利なこととして働くのである。ボーア理論は"原子構造とスペクトルの理論"を開幕するものであり、従来からの統計熱理論にもたちまさってこの分野を量子論の新しい主流としておし出すことになる。かつまた、それは分光学の実験を鼓舞し、その黄金時代を誘導することになる。

原子スペクトルは(i)と(iii)を組み合わせて説明されるといったが、両者を別々に実証することも可能なことがフランク－ヘルツの実験（1914）によって示された。それは原子が、エネルギーを光からでなく自由な電子の運動エネルギーから受け取るような現象にかかわるものであって、その場合にもやはり原子はとびとびの定常状態にあり、その間の移りかわりが飛躍的な変化として行なわれることを信じさせるものである。

低圧の気体（彼らは単原子気体としてまず水銀蒸気をえらんだ）のなかへ、かなりのろい一定の速度の電子線を送り込み、原子に衝突させる。原子ははじめそのエネルギー準位 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ のうちの最低のもの E_1 の状態に収まっているが、電子の（非弾性）衝突により、これからエネルギーの一部をもらってエネルギーのより高い状態 $E_2, E_3, \cdots\cdots$ 等々に移るチャンスを生じる。しかし、それは飛び込んできた電子のエネルギーが E_2-E_1 を超えたときにはじめておこりうるのであって、それまで

は弾性的に散乱されるだけである。実際、送り込む電子のエネルギーを次第に増してゆくと、あるところで送り込んだ電子のエネルギーが急に減少するのがみられ、同時に原子が $E_2 \to E_1$ なる遷移に相当するスペクトル線を発するのがみられた。(これは振動数条件 (4-9) を直接実証したものといってよい。)[11] さらに電子のエネルギーが前にのべたイオン化エネルギーに等しい値に達すると、実際イオンが現われはじめるのがみられる。(ついでに注意するが、このことは、前に光電効果においてイオン化する直前の原子があって、これが光の波をうけてその引金作用により飛び出すのだという類の説明はだめなことを示す。)

ボーアの三部作は「原子と分子の構成について」という表題の示すように、その元来の目的は多電子原子と分子にあり、第2、第3論文は実際それをあつかっている。しかし、そこでは彼はトムソン－長岡流の古い環状モデル的なものにもどっており、量子条件のおき方も適当でなく、理論は対応原理的基礎を欠いており、当然ながら不成功であった。

多電子原子については、まず「原子番号」Z という順序数が電子の数(あるいは核の電荷)という量的な意味をもつことを発見せねばならなかった。このことはまずファン・デン・ブレック A. van den Broek (1913) やまた他の人々が想定した。またタイミングよく、当時X線分光学がスタートしており、モーズリー H. G. J. Moseley は原子の特性X線スペクトルを観測して、それが Z とともに単調に変化すること、しかも水素のバルマーの公式と似た公式に表わされることを明らかにした。つまり特性X線のスペクトル・タームが $-RZ^2/n^2$ のように書けるのである。この事実に対してコッセル W. Kossel がボーア理論にもとづく正しい解釈を与えた (1914)。それは Z に対するファン・デン・ブレックの解釈をうらづけるものであった。この原子番号の発見は非常に重要なものであるが、ダーウィン C. G. Darwin によれば “やさしい発見”――発見がやさしかったわけではないが、一度発見されてしまえばたや

(11) フランクとヘルツ自身は、その実験結果を正しく解釈していなかった。ボーアが正しい説明を与えたのである。

すぐ理解できてあっさり受け入れられるような発見――の典型的なものである。とにかくこうして多電子原子の実体的基礎は確立された。[12]

フランク－ヘルツの実験およびモーズリーの結果を説明しえたことは、初期のボーア理論の実験と密接する面における顕著な成功であった。しかしボーア理論自体のより内面的な展開は、思ったほど容易でなかった。ボーアはゼーマン効果の説明にも、当時発見されたシュタルク効果や、またスペクトルの微細構造の説明にも成功しなかった。

ボーア理論が出てほどなくして世界は第一次大戦に突入したが、この時期にボーア理論の主な発展はゾンマーフェルト、コッセル、エーレンフェスト、アインシュタイン、シュヴァルツシルト K. Schwarzschild らによってなされる。これらの人々の仕事の影響を受けてボーア自身の仕事が新たな展開をはじめるのは、戦争末期1917年の末ごろからになる。

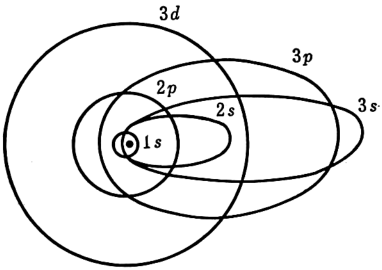
§4•2　量子条件とゾンマーフェルトの理論

ボーア以後、量子がミクロの力学を規制する不連続性として普遍的な意義をもつことが認識され、ことにそれが原子の力学と原子からの光の放出・吸収を支配するかなめとして働くことになったが、これについて一応のまとまりをもった理論を体系化しようとする動きが出てくることになった。そこでの中心的なテーマは、まず量子条件をなるべく一般的な形に定式化し、ことに多自由度の場合に拡張することであった。この仕事はいささかもたついたが、やがてウィルソン W. Wilson、ゾンマーフェルトらにより手がけられることになる。

ことに1915—16年のゾンマーフェルトの仕事は、ボーア理論の最初の本質的な発展を意味するものである。数学的手腕において練達したゾン

---

(12)　原子の実体的基礎の確立のためには、なお同位元素についての「質量数」A の観念が確立される必要があるが、これは少しあとにはたされる（アストン F. W. Aston、1919）。Z や A は普通の意味の量子数ではないが、やはり自然数であり、原子の「レプトン数」(lepton number) と「バリオン数」(baryon number) に相当する。



水素原子における電子の軌道。ボーアの理論では1s、2p、3dのような円運動だけが考えられていた。ゾンマーフェルトの理論では、たとえば 3d 軌道とエネルギーを等しくする楕円軌道3s、3p がなお許される運動として存在する。

マーフェルト（当時47歳）は、水素原子の量子論をボーアよりももっと本格的にとりあつかうことによって、水素スペクトルのゼーマン効果、シュタルク効果、および微細構造を一挙に説明することに道を開いた。

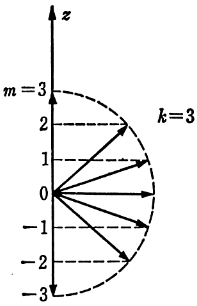
それまでの量子論は、ボーアの理論を含めてすべて本質的に１自由度の系の量子化に限られており、多自由度の場合についてははっきりした方式が出されていなかった。水素原子の問題を完全にとりあつかうには３次元的にあつかうべきことは明らかであり、また一般的あつかいのためには、ボーアのようにニュートン力学的にでなく、正準形式の力学のほうが有力であろうと考えられる。

もとのプランクの量子条件の基礎づけや一般化は以前からいろいろ考察されており、それについてはすでにのべた。１自由度の場合の量子条件は（3–17）で一般的に表わされ、これはプランクやボーアの量子条件(3–11)、(4–3)、(4–7）をその特殊な場合として包括している。

量子条件を３次元運動——ないしもっと多自由度——の場合に拡張するためには、結局、変数分離する多重周期運動については（3–17）を各作用変数ごとに適用して

$$J_i=\oint p_i dq_i=n_i h \qquad (4\text{–}11)$$

ととるべきだと一応考えられる。なぜなら、これによって３次元的な場合にも水素原子についていぜん離散的なボーアのエネルギー準位が得られることになるからである。実際、ゾンマーフェルトはこのような量子条件を考慮して、水素原子の問題をもう一度解きなおし、許される運動



方向量子化。角運動量の大きさがたとえば $k=3$ に量子化された軌道は、その方向が角運動量の z 方向成分が $m=3, 2, \cdots\cdots, -2, -3$ のいずれかの値をとるようなものに量子化される。

として次のようなとびとびのケプラーの楕円軌道を得た。

そのエネルギーは、楕円の長軸の長さできまり、ボーアの場合の円運動のどれか一つのエネルギーに等しく、一つの量子数 n で区別される。同じエネルギーの楕円軌道でも短軸の長さのちがったとびとびの形が可能であり、これらは角運動量の大きさを異にしており、角運動量の大きさを指定する量子数 k $(n \geqq k > 0)$ で区別される。n と k を指定しても、さらにこのような楕円軌道は、われわれが用いている座標軸の一つに対して軌道面のとる方向がとびとびのものに限定される。すなわちエネルギーと角運動量の大きさの量子化された楕円運動は、その角運動量の z 軸方向への成分が $\hbar$ の整数倍（この整数を m_k とかくと、m_k は $-k$ から k までの $2k+1$ 個の値に限られる）になるような方向のものに限定されるのである。これを「方向量子化」という。こうしてボーアの場合に一つの円運動で考えられていたエネルギー準位には、じつはいくつかの異なった楕円運動が属していることになる。その一つ一つが「量子状態」であり、このような事情を「縮退」と呼ぶ。

もし外部から磁場が働いているならば、われわれは、もはや z 軸を任意の方向にでなく、この磁場の方向に選ぶべきである。そして、この方向に対してやはり角運動量の z 成分が量子化されるが、その各状態は磁気能率（これは角運動量に比例する）の z 成分を異にしており、したがって、もはやわずかずつエネルギーを異にする（縮退がとれる）ことになる。この前者（磁気能率の方向量子化）は後になってフランクフルト

のシュテルン O. Stern とゲルラッハ W. Gerlach の非常にオリジナルな実験によって直接確かめられた(1921)[13]。また後者(磁場で準位の縮退が一部とれること)からして、ゼーマン効果(スペクトル線が磁場で何本かに割れること)の簡単なもの(正常ゼーマン効果)が理解されることになる[14]。

外場がない場合の水素原子にかえると、この問題は束縛状態を考える限り、3次元等方調和振動子の場合と同様に、軌道が閉じるという特徴をもっている。しかしながら、電子の相対論的な質量変化を考慮することに進むならば、軌道はもはや閉じなくなり、そのことに対応して、量子論では k に関する縮退がとかれるということをゾンマーフェルトは見出した。この相対論的効果によるエネルギー準位への補正は、元来ボーアの理論で $v \sim e^2/\hbar n$ なることを考慮して

$$\delta E/E \sim (v/c)^2 \sim \alpha^2/n^2 \qquad \left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}\right)$$

の程度であることが予想されるが、彼はこれを精密に算出し、実際それが k によることを示すことができた。これによって水素のスペクトル線の微細構造を説明しえたことは見事な成功とみなされた[15]。

さてボーア - ゾンマーフェルト理論によって、エネルギーはもはや一般に等間隔でなくなり、n はプランクのように量子の数ではなく「量子数」となる。ゾンマーフェルトの理論では、そのほかに角運動量の量子数 k、m_k が登場してきた。ゾンマーフェルトは、このような整数によ

---

(13) 銀の原子線を不均一磁場内におくると2本に分岐する。分岐の幅から、銀の原子がボーア磁子の磁気能率をもつことがわかる。ただし、この場合の分岐の正確な数(つまり2本)は、スピン磁気能率の考えによらないと理解できない。

(14) 選択則を付加することにより、ローレンツの古典論と同じ結果が再現されることになるわけである。

(15) これはあとからみると、波動力学的な効果とスピンの効果とがこの問題でちょうど打ち消し合うという、偶然的要素に依存している。なお実験的には、水素スペクトルの微細構造は古くマイケルソン A. Michelson 以来知られており、また当時パーシェンによってくわしくしらべられた。

る原子スペクトルの説明が「自然の和声」に関する古いピタゴラス－ケプラーの数の神秘主義の復活を思わせることに魅惑された。

とにかくゾンマーフェルトの理論にいたって、角運動量の量子化ということがエネルギーのそれとならんで本格的に登場してきたことは、原子構造とスペクトルの理論の以後の発展において中心的な意義をになうことになる。あとでふれるように、多電子原子の殻内の電子状態は、もっぱらこのような角運動量の量子数で分類されるのである。また角運動量の合成則に相当することがらが、方向量子化を媒介としてとらえられるようになり、それは角運動量の保存に由来する選択則とともに、スペクトルの多重構造とゼーマン効果の分析において重要な役割を演ずることになり、ついにはスピンの認識にまでつながっていくのである。

ボーア－ゾンマーフェルトの理論が形成されたが、ここで理論の中心となるものは先にのべた量子条件であって、これをいっそう明確にし、かつ根拠づけるということが依然重要である。じつは多重周期運動についての量子条件を一般的に厳密に与えることは簡単な仕事ではない。ともかく、この量子条件の基礎にあるものとして、位相空間を h^f（fは自由度）の体積をもつ素領域に分割するというプランクの考え[(16)]、また準静的断熱変化によって量子状態は量子状態にとどまるというエーレンフェストの仮設がある。これらは、いずれも元来量子が統計熱理論との関連で導入された経過を吟味することから自然に出てくる考えである。そのほか（4–10）で示したボーアの対応原理の要求も、量子条件をきめる上に有用である。

多重周期運動の量子化の標準的な方式はハミルトン－ヤコービ Hamilton–Jacobi 方程式を用いてシュヴァルツシルトとエプシュタイン P. Epstein によって次のように与えられた。力学で知られているように、作用積分 $W=\int_{t_0}^{t} L dt$ は、実現される運動については座標 q と時刻 t の関数とみなされ、

(16) 石原純の考え（1915）もこれに近いものである。

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H\left(q_1, \cdots\cdots, q_r, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial W}{\partial q_r}; t\right)=0 \qquad (4\text{–}12)$$

なるハミルトン－ヤコービの方程式をみたす。ここに H はハミルトニアンであるが、これが t をあらわに含まない場合には、W は

$$W=S(q)-Et$$

なる形で t に依存し、$S(q)$ は

$$H\left(q_1, \cdots\cdots, q_r, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial S}{\partial q_r}\right)=E \qquad (4\text{–}13)$$

をみたす。ところで適当な一般座標を用いることによって (4–12) が変数分離し、かつ各座標がきまった振動数をもつならば、系は多重周期的である。そのような場合、作用変数 $J_k=\oint p_k dq_k$ とそれに共役な角変数 $w_k=\partial S_k/\partial J_k$ の組を導入することができるが、前者に対して $J_k=n_k h$ とおくことにより多重周期運動が量子化される。

この形式は、のちにシュレーディンガーの波動方程式への橋渡しとなったものとして重要な意味をもっている。量子化のためにハミルトン－ヤコービの作用関数 S をもってくることが適切なことは、これが作用の次元をもつことからも示唆されることである。そして、一般に前期量子論をハミルトン－ヤコービ形式で考えることが以後の発展に有効だったことは、のちに量子力学が変換理論的な性格をもつという事情につながることがらである。

なおアインシュタイン (1917) は、量子条件は S 関数が

$$\oint dS=\sum_k \oint p_k dq_k=nh$$

なる関係で配位空間の多価関数であることだと表現した。これは $\psi=\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)$ なる量を導入すると、ψ が1価なことを意味し、のちのドブロイのアイディアにつながることになる。

シュヴァルツシルトとエプシュタインは、彼らの方法によって水素スペクトルのシュタルク効果の式を導いたが、これは実験とよく合った (1916)。これは前期量子論における、とりわけまぎれのない勝利とみな

された。[17] シュタルク効果は（正常）ゼーマン効果の場合とちがって、古典論では全然説明できないものであった。実際、1次シュタルク効果について振動数の分岐 $\Delta\nu$ の比例係数は $\hbar/me=\alpha^{-1}e/mc$ であり、ゼーマン効果の場合とは異なり $\hbar$ を含んでいる。

§4・3　遷移確率

ボーア‐ゾンマーフェルトの理論によって量子論が一つのまとまりをもったものに組織されたが、これはまだ一人立ちできる理論とはいいがたい。この理論はスペクトルの解読を正しい軌道にのせたとはいえ、まだ光と物質の相互作用の機構を解明したものとはいえない。この理論は、いまのところ原子のうち出す光の性質のうち、その振動数を与えるだけであって、その強さや偏りについて何もいっていないが、これらも実験で測られる重要な量である。この点からしても、この理論ははなはだ不完全なものといわねばならない。[18] これに対し純粋の古典論は、実験と合わないことを措くとすれば、理論自身としては完全で、強度などの量も計算できるようになっていた。ボーア‐ゾンマーフェルト理論は、このような欠陥をなんとかして補っていく必要がある。

ところで量子論の立場で強度（あるいは断面積）というような量を表現するには、単位時間における遷移の頻度、すなわち「遷移確率」という概念――これは時間発展にかかわる概念である！――を少なくとも現象論的に導入せざるをえない。この概念はプランクの「第二理論」にはじまるが、かつてブラウン運動をあつかい、確率過程の理論をはじめた経験をもつアインシュタインによって、いっそうはっきり導入された。彼は1905年来いくどもプランクの分布式にたちかえり、そこから多くのことを汲み出したのであるが、1916—17年の二つの論文では、プランク

---

(17)　ただし2次シュタルク効果について、やがて実験との食い違いがみとめられることになる。

(18)　前期量子論が、そのままでは光電効果について電子の逸脱の微分断面積を与えないのも、同種の不完全さを意味している。

の分布式が原子による輻射の放出と吸収の遷移確率の概念にもとづいて導き出せることを示した。§3·1 でのべたように、プランクは振動子と熱輻射の間のエネルギー交換による熱平衡を考えて、その分布式を出したわけであるが、(3-4) 式（振動子の平均エネルギーと熱輻射のエネルギー密度の間の関係）を導くその前半の部分は古典論によっており、振動子の平均エネルギーを算出するその後半の部分は量子仮設によっている。アインシュタインはこの論文において、プランクの方針に従いながらも、いまやボーア理論が成立した段階にあって、全部を量子論的なあつかいに書きかえることが可能であること、また同時にプランクがエントロピーを組合せ論的な方法で算出しているのも、より運動論的なあつかいでおきかえうることを示したのである。

そもそもプランクの分布式は、当時までの量子論の種々の他の代表的な関係式——光電効果に対する (3-12) とか振動数条件(4-9) など——とは異なり、(連続スペクトルの) 強度分布に関するものであるというユニークな特質をもっている。このことは、それが熱平衡における純統計力学的な意味での確率であるボルツマン因子のほかに、なにか量子論的本質をもつ遷移確率に関する情報を含んでいることを意味している。

実際、原子と光量子の集まりが熱平衡にあるとき、原子は各 E_n の状態に $e^{-E_n/kT}$ に比例する確率で存在するが、そのおのおのがまわりの $u(\nu)$ なるエネルギー密度の熱輻射から $h\nu$ なる光量子を吸収して E_m の状態（ただし $E_m-E_n=h\nu$）に移る単位時間あたりの遷移の確率を $B_{nm}u(\nu)$ とし、また、はじめ E_m の状態にあるとき $h\nu$ の光量子を放出して E_n におちる遷移の確率を

$$A_{mn}+B_{mn}u(\nu) \tag{4-14}$$

とすると、この原子と光量子の集まりが熱平衡にあるための条件からプランクの分布式がすぐにひき出せることがわかる——ただし、そのさい上記の係数の間に

$$A_{mn}=\frac{4\pi h\nu^3}{c^3}B_{mn}, \qquad B_{nm}=B_{mn} \tag{4-15}$$

なる関係が存在するとしてである。

(4-14) の第1項は「自発放出」を、第2項は「誘導放出」を意味するが、もし上の推論で後者の存在を考慮しなかったとするならば、プランクの分布式のかわりにヴィーンの分布式を得ることになる。(19)

もともと量子は、プランクにおいて主として統計熱理論に内在的な一要素という形で登場したのであった。ところがいまこのアインシュタインの分析によれば、プランクの分布式はボルツマン的な確率のほかに遷移確率というもう一つの確率的概念にも関係しており、それに関する (4-15) のような情報を含んでいることが明らかになった。このような二つの異なる確率的概念の分岐は重要な一歩であったといわねばならぬ。統計熱理論は量子論の起源と発展に多くの契機を与えたのであるが、量子力学にまでいきつくことは、純粋な統計熱理論的概念のみをもってしては結局のところ不可能であって、そのためには、それとは区別された遷移確率の問題に取り組んでいくことが要求されるのである。

いずれにせよ、ボーアの理論で光の放出・吸収による定常状態間の遷移という概念が出てきた以上、遷移確率という量が登場してくることはほとんど必然的な成り行きである。これは原子と輻射の相互作用のダイナミックスにかかわる量であるが、その本質は何であろうか。すでにのべたように、放射能による原子核の崩壊は一定の崩壊確率でおきることが知られているが、アインシュタインは原子の発光による確率的遷移をこれとの類推で考えた。しかしながら彼は、そのさい要素過程のおきる時刻を偶然にまかせることには不満であって、この偶然の背後に因果性が隠されているという見方を次第に強めるようになる。つまり遷移は偶然の法則に従うが、一つ一つの遷移がどうおこるかということには——

---

(19) 誘導放出の存在は古典的なマックスウェル理論にもとづいて対応原理的に帰結される。たとえば振動子のようなものに光の波があたるとき、振動子の振動の位相と光の波の位相との間の適当な位相差によって、光の吸収もおきれば放出もおきる。なお (4-15) の関係は、輻射場にある ν なる光量子の数を n とすると、吸収および放出の遷移確率がそれぞれ n と $n+1$ とに比例することに相当する。

サイコロを投げてある目が出る場合と同様に——それぞれの原因があるという見方である。この点は、量子論の解釈問題における対立の一つの発端となる。そして、その後の進展において、アインシュタインのような意味での因果性を想定しない立場が主流となるのである。つまり「遷移確率」によって、のちに量子力学の確率的解釈につながるものがここにはじめて登場したことになる。

なおアインシュタインが同じ論文で強調したもう一つの点は、自発発光のような場合でも、光は原子から光量子としてある方向に (3–13) の $\hbar\vec{\kappa}$ の運動量をもって放出され (「針状輻射」)、したがって原子は反対方向に反跳をうけるという考えである。しかしながら、他方では原子が光るさい、光が球面波として出たことに相当する干渉性を示しうることも実験的にわかっている。したがって、このアインシュタインの考えが一方的に正しいとはいえず、これは再び光の粒子－波動の二重性のディレンマを意味しているのである。

§4・4 対応原理

アインシュタインの分析によって遷移確率という量が導入され、かつ自発放出についてその係数 A_{nm} がきまれば、誘導放出および吸収の係数 B_{nm} もきまることになる。しかし、この A_{nm} 自身をどうやって理論的に定めうるかが問題である。ところがこの問題を解決するためになんらか参考になることとしては、われわれはさしあたり古典論のほか何ももっていない。そこでまず古典論によって強度を算出し、それを量子論の言葉に焼き直していくことを試みる。この焼き直しにあたって鍵となるのは、ボーアがすでに振動数に関して見出している対応関係 (4–10) である。

ローレンツ理論による発光の考え方で考えてみるとどうなるであろうか。n 番目の定常状態で電子が基本振動数 ω_n[(20)] の周期運動を行なっているとする。すると、これは基本振動とそのいろんな“倍音振動”(その

---

(20) これからは普通の振動数 ν の 2π 倍を用いることにし、これを ω と書く。

振動数は τ を整数として $\tau\omega_n$）とが、それぞれ一定の振幅をもって重なったものとみなされる。[21] つまり、この定常状態における電子の位置座標 x_n が時間 t の関数として

$$x_n(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x_n(\tau), \qquad x_n(\tau)=X_n(\tau)e^{i\tau\omega_n t}$$
$$X_n(\tau)^*=X_n(-\tau) \tag{4-16}$$

なるフーリエ級数（各項は複素数）の形に表わせるということである。この各フーリエ成分 $x_n(\tau)$ が、振動数

$$\omega_n(\tau)\equiv\tau\omega_n$$

のスペクトル線をヘルツの双極子輻射の式に相当して時間平均において

$$K\omega_n(\tau)^4|X_n(\tau)|^2 \qquad \left(K=\frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\right) \tag{4-17}$$

の強度でうち出す。こうして周回電子は連続的に光の波を出し、連続的にエネルギーを失っていくはずであった。

これに対してボーアの理論では、電子は定常状態のどれか一つにある限りまったく光を発しないが、それが突然下の準位に移ることがあり、そのさいに光を放つ。[22] つまりボーア理論による発光は、ローレンツの古典論による発光にいわば“節をつけた”ような格好になっている。

ボーア理論では n 番目の定常状態は (4-3) 式できまり、これからその状態でのエネルギー E_n や軌道運動の基本振動数 ω_n もきまるが、両者の間には

---

(21) いま簡単のため1自由度としているが、多重周期運動の場合も同様に論じうる。

(22) このような考え方は、ある意味で、のちのディラックの原子と輻射の相互作用の量子力学による摂動論的あつかいを予見したようなものになっている。つまり電子と電磁場の間の電磁相互作用は弱いので、第一近似ではそれは静的なクーロン力で表わされ、それが量子論において定常状態を定める。そして次の近似では、輻射場と電気双極子モーメントの相互作用によって光量子の放出・吸収がおきるということである。

$$\hbar\omega_n = \frac{\partial E_n}{\partial n} \tag{4-18}$$

なる関係がある[23]。したがって、また

$$\hbar\omega_n(\tau) = \tau\frac{\partial E_n}{\partial n} \tag{4-19}$$

一方、この理論では、この準位から $n-\tau$ 番目の準位へ遷移するさいの光の振動数 $\omega_{n,n-\tau}$ は

$$\hbar\omega_{n,n-\tau} = E_n - E_{n-\tau} \tag{4-20}$$

できまった。(4–19) と (4–20) を比べると、軌道運動の倍音振動数と遷移による光の振動数とは一致しないが、両者は微分と差分との関係にあり、$n \gg \tau = \Delta n$ (すなわち高い準位間の遷移) において漸近的に一致することがわかる。すなわち

$$\omega_{n,n-\tau} \approx \omega_n(\tau). \qquad (n \gg \tau)$$

これが前の (4–10) の関係にほかならない[24]。そして、こういう限界領域ではリッツの結合規則

$$\omega_{n,n-\tau} + \omega_{n-\tau,n-\tau'} = \omega_{n,n-\tau'} \tag{4-21}$$

も $\omega_n(\tau)$ に関する"結合規則"

---

(23) ここで n は $J = \oint pdq = nh$ の nであり、連続変数とみなしてさしつかえない。つまり (4–18) は $\omega = \partial E/\partial J$ にほかならない。なお (4–18) は振動子の場合のプランクの式 $E_n = n\hbar\omega$ の一般化とみなされる関係である。

(24) ボーアは、じつはこの対応関係の要求からして、水素原子の場合の量子条件が得られることも示していた。つまり $n \gg \tau$ なる遷移は、一般には放出される光の振動数の低い領域に相当し、不連続性の影響は目立たなくなる。そういう領域では、ちょうどプランクの式が古典的なレーリーの式に近づいたように、量子論の結果は古典論の結果に一致するはずである (振動子のような場合は特別であって、放出される光の振動数はいつも軌道振動数に等しい)。実際 n および $n-\tau$ が大きい状態では、電子は普通の原子の大きさに比してはるかに大きな軌道を描いており、このような場合、古典論が正しい結果を与えるはずである。

$$\omega_n(\tau)+\omega_n(\tau'-\tau)=\omega_n(\tau') \tag{4-22}$$

に近づく。

このような振動数に関する対応関係からして、われわれは古典論をいかなる仕方で量子論に対応させるべきかということ、またこのような対応がいかなる条件のもとで漸近的な一致をもつかという判定をつかむことができた。これは基本的な鍵であり、振動数以外の性質にもおし及ぼすことができよう。そして、このような形で、具体的にとらえられた対応をのがさないようにして追いつめていこうとする。要するに、高量子数の領域における $n\to n-\tau$ なる遷移には、電子の n 番目の軌道運動の、τ 番目のフーリエ成分

$$x_n(\tau)=X_n(\tau)e^{i\omega_n(\tau)t} \tag{4-23}$$

をあてがうことができ、$n\to n-\tau$ なる遷移による光の強度は、(4-23) が古典的に発する強度 (4-17) と漸近的に一致するはずだということである。そして (4-17) を光量子のエネルギー (ボーア流にいえば、1回の遷移で光波に移るエネルギー) $\hbar\omega$ で割ったものが放出の遷移確率となるから、それは

$$A_{n,n-\tau}\approx\frac{K}{\hbar}\omega_n(\tau)^3|X_n(\tau)|^2 \tag{4-24}$$

(これは、たしかに $[t^{-1}]$ の次元をもっていることに注意)。この場合、確率は原子の集団を想定し、それに対する平均頻度を意味しているが、このことは元来、古典的な (4-17) 式が時間平均を意味する量であったことに対応している。

とにかく、こうして量子論において発光の強度あるいは遷移確率を漸近的に与える処方箋としての (4-24) が得られた。

この遷移確率の式 (4-24) は $n\gg\tau$ のところで妥当するものであって、これだけでは $n\sim\tau$ の場合はわからないが、さしあたり、この処方箋をそのままの形で $n\sim\tau$ の場合にまで外挿的におし及ぼすことが考えられる。もちろん、このようなところでは、それは不精密なものとならざる

をえない。

いずれにせよ、上の結果は大きな進歩である。このような対応原理とそれによる（4-24）式は、ボーアによって1918―23年の間に徐々に明確にされていったことである。このような対応原理の方法は、古典論の側からみるならば、それに量子をはめこんでゆく大切開手術のようなものともみなされよう。

上にみたように対応関係は、相互のあいだにギャップをもつ振動数条件と量子条件――それから出てくる（4-18）――とを対比することによって見出された。すなわち対応関係は一致ではなく、このようなギャップの表現という意味をもつ。こうして対応原理は、古典論を利用するけれども、古典的な法則の見方を改変することを含んでいる。すなわち、量子論による強度が古典的なものと漸近的に一致するといっても、それは結果としての一致であって、光の射出の機構における根本的な差異は存続しているのである。量子論では遷移という考えのうえに立って強度を理解せねばならぬのだから、おのずから確率的な見方を必要とすることになる。すなわち発光が強いということは、多数の同じ原子を考えたとき、問題の遷移が数多くおこるようなものだということである。[(25)]

ただし、この対応論的アプローチは、輻射の機構をすっかり解明したわけではない。輻射の機構に関してボーアは、ずっと光量子の観念を表に出さない表現をえらんだ。しかし遷移のさいに放出され吸収される光の粒子－波動の二重性のディレンマは、前節にものべたように依然存在している。

対応原理の直接的な適用の例は、クラマース H. A. Kramers (1919)

---

(25) ここで再び次の疑問がおこる。同じ n 状態にある多くの原子において、ある時間にある個数のものは $n-\tau$ 状態へ遷移し、他のある個数のものは他の $n-\tau'$ 状態へ遷移し、また他のあるものは全然遷移しない、というのはどうしてであろうか？ それは同じ定常状態においても、もっと隠れた状態の相違点が隠されており（状態を区別する隠れたパラメターがあり）、これをも含めての状態の因果的な経過において、別々の遷移が生じてくることを意味するのであろうか？ これは前節であげた解釈上の問題と同じものである。

がこれによってバルマー線のシュタルク成分の強度比を算出したことである。結果は実測とかなりよく合った。(26)

また対応原理は、$n \sim \tau$ の場合には不精密になるといったが、それでもそれはかなり有用である。第一に、それは「選択則」を与える（ボーア、1918)。たとえば線型振動子について考えてみると、この場合、フーリエ振幅は

$$|X_n(1)|^2 = |X_n(-1)|^2 = \frac{\hbar n}{2m\omega} \tag{4-25}$$

その他の $X_n(\tau)=0$

であるから、遷移確率として

$$A_{n,n-1} = \frac{K\omega^2}{2m} n \tag{4-26}$$

を得（これが $\hbar$ を含まないことに注意)、同時に $\Delta n = \pm 1$ なる選択則を得る。このことによって、振動子が放出し吸収する光の振動数は振動子の機械的振動数に等しいという古典的関係 (3-9) が、前期量子論の立場でも成り立つことがようやく保証されたことになる。同様にして選択則として、角運動量の量子数に関するもの（$\Delta k = \pm 1$, $\Delta m_k = \pm 1, 0$）も得られる。これが角運動量の保存則の立場からも得られることはルビノヴィッチ A. Rubinowicz が示した。

ここで対応原理に関して一、二の注意を加えておこう。すでにみたように、対応原理は結局 $n \to n-\tau$ なる遷移に電子の軌道運動のフーリエ成分 (4-23) をあてがうことに導いたわけであるが、この量はその絶対値の二乗が (4-24) 式によってその遷移の確率を与えるという意味で「遷移振幅」とよぶべき量である。そしてこの $x_n(\tau)$ は、実験的な量と直接的に関係していることからして、もとの $x_n(t)$ 自身よりも物理的に重要な量であるとみなすこともできよう。しかも注目すべき点は、(4-16)の展開を通じて出てくるこの遷移振幅は複素数であることである。

(26) 一般に実験的に直接測られるスペクトル線の強度は、励起の確率と遷移確率の両方に関係する。

このことは、さしあたりテクニカルな事柄にすぎないようにみえるが、のちに行列力学への移行にさいして本質的な意義をおびることになる。

第二に、(4-24) は対応原理的推論によって得られたが、ここであらためて (4-24) 自身に量子論の法則という地位を付与するという立場をとることもできる。しかし、そうだとすると、いずれはこれを一貫した量子論の理論体系から直接的に（つまり古典論を媒介せずに）演繹できるようにせねばならないであろう。そしてそのような将来の理論は、対応原理をすでにみずからのうちにビルト－イン (build-in) しているはずである。実際 (4-24) はきわめて重要なダイナミカルな関係であって、一方ハイゼンベルクがやがてこれを手づるとして行列力学を発見することになり（第6章参照）、他方この関係は、のちの量子力学における“黄金則”(golden rule) とよばれるものの原型をなしているのである。

これまでわれわれは、もっぱら原子による光の放出や吸収の場合について遷移を語ってきたが、遷移というものは非常に一般的な概念であるとみるべきものであり、そのことは量子論自体が一般的な適用性をもつ理論であるということのあらわれであると考えるべきである。たとえば光電効果は光の吸収であったが、この場合はこの遷移によってとび移る終状態が連続スペクトルに属する。このように遷移というものは必ずしも状態自身の離散性の結果として要求されるものとは限らないわけである。その他、放射性原子の崩壊も遷移の別の例と考えられる。それらはいずれもエネルギー（と運動量）の確定量が、ある部分から他の部分へ移るような種類のものであった。それで遷移ということには、なにかエネルギーと運動量という物理量が特別な意味をもっているように見えるかもしれない。しかし、遷移はこのようなものに限るわけではない。

それはたとえば角運動量がとぶというのでもよい。前にのべた水素原子に外から磁場をかける場合を考えてみよう。磁場がいくら弱くても、電子の運動は磁場の方向に対して方向量子化をみたすような軌道のどれかにあると考えられる。そこでこの磁場をそのまま連続的に弱めてゼロにしたのちに前とは異なった方向に弱い磁場をかけるとする。すると電子は、新しい方向に対して方向量子化をみたすような軌道のどれかにと

ばねばならぬはずである。この場合は光の射出はなく、エネルギーの変化はないが、角運動量の成分がとぶ。(27)

これに似た例は光量子の偏りに対する次のような実験である。光は"偏り"という性質をもっているが、これを光量子の立場で考えると、個々の光量子がなんらか偏りという性質をもつものと考えられる。そこでいま、ある偏光板を通過させてきまった方向に偏った光量子の流れをつくり、次にこれを最初の偏光板の軸と傾いた偏光板（検光器）を通す場合を考えると、光量子はこれを通るか通らぬか、いずれかでなければならない。すなわち光量子の偏りは検光器の光軸の方向、またはこれに垂直な方向に偏った状態のどちらかへと遷移する。遷移にはさらにもっといろんな場合がある。

本節では、スペクトル線の強度の問題に対処するための対応原理の方法をのべたが、前期量子論の時代には他の問題についても対応原理的議論にうったえることが必要になる。対応原理は、一般的にいえば、純粋の量子論ではさしあたり部分的にしか答えられない種類の問題について、古典論で考えたうえで、つぎにその議論を量子論の言葉に焼き直しつなげていくことによって量子論的な結果を推測するやり方であって、そのさい高量子数で古典論と量子論の漸近的一致というようなことを手掛りとするが、問題に応じて臨機応変に処置していかねばならない。一般的にいって対応原理は不完全な理論でもって、なんとか有効な結果をさぐり出すための指針である。なお対応原理の方法論的側面については後章でたびたびとりあげる。

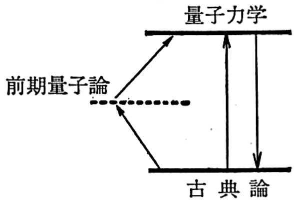
とにかく対応原理で補強された前期量子論は、古典論と量子力学との間の中間段階として重要な意義をもっている。

量子力学と古典論との間には再び一定の対応原理的な関係があり、い

---

(27) これは前期量子論による見方である。その正しい意味については後章をみよ。いまの場合、この磁場は無限に弱くてよい。しかし、この磁場が無限に弱くはなく、かつ不均一磁場の場合がシュテルン－ゲルラッハの実験に相当し、角運動量の成分を測定するという意味をもつことになる。

ったん量子力学が見出されてしまえば、古典論から量子力学へ移ることは少なくとも形式的には普通の場合は簡単であるが[28]、歴史的には古典論から出発して、そういう仕方で直接的に量子力学に上昇するということはありえないことであって、古典論と量子の観念を折衷させ同居させた前期量子論という段階を仲介にすることが必要であった。この前期量子



論には、すでにほとんど十分な素材が仕込まれており、それの換骨奪胎によって量子力学の最初の一つの形としての「行列力学」の発見がやがては可能となるはずのものであった。

§4・5 原子構造論

前にボーア-ゾンマーフェルト理論が直ちに一人立ちできるような理論とはいえないといったが、そのことに関連する第二点としては、元来水素原子についてたてられたこの理論の、He 原子その他の多電子原子の場合への一般化が純理論的な立場からはスムースにゆかないということがあげられる。多電子原子の問題は変数分離しないので、もともと古典力学的に解きがたいものなのだが、それに加えていまは運動が厳密にいって多重周期的でないため、量子条件をどうおくべきかが明らかでないという原理的な難点がある。

こういうわけで多電子原子の問題をまともにあつかうのは困難である。しかしながら、幸いこの場合、量子論の言葉を用いつつ実験事実にあわせていく半経験的なアプローチが有効であり、これによってこの複雑な

---

(28) これはいずれあとで示される。

問題をある程度解明できることが次第にわかってきたのである。

多電子原子についてボーアは電子リングの模型に深入りし、長らくこの線を追求していたが、ランデ A. Landé らの批判 (1918) をうけた。一方、コッセルがモーズリーの特性X線スペクトルの規則性と元素の周期律とにもとづいて考えた電子の殻状配置の考えがより合理的な出発点を与えることが認められ、ボーアもようやくこの方向に転じた。ボーアはこれをさらにおし進めるにあたって、原子の光学スペクトルと周期律との間にみられる関連性を手掛りとした。これらはいずれも——X線スペクトルとはちがって——原子の表層の電子に関係している。

たとえば1価のアルカリ原子のスペクトルは、すでにリドベリが認識していたように水素の場合と同形であって、アルカリ原子が

$$-\frac{Rh}{(n-a_k)^2} \tag{4-27}$$

なるエネルギー準位をもつこと、そして発光がその1個の価電子に関係していることを示唆する。つまり、そのたくさんの電子のうちの1個(価電子) を除いたもので“閉じた殻”をつくっており、原子核とこの閉殻からなる安定な一団のつくる平均的な静電場のなかを価電子が運動していて、これの遷移によって光るのだと考えられる。この平均場はいぜん球対称な中心力場であるが、距離への依存性はもはやクーロン型ではない。しかし k、m_k なる角運動量に関する量子数の存在と、m_k に関する縮退とは、力の場が球対称なことに由来する一般的なことがらであるからいぜん妥当する。一方、力の場がクーロン型からずれているので、(非相対論的) 水素原子の場合にみられる k についての縮退はとかれて、準位は (4-27) のような形になる。

このような考え方は一般化できる。そこでボーアは、Ze なる電荷をもつ原子核に電子が一つずつ順番に捉えられていくとき、それが順次どういう量子軌道に入っていくかを想像してみる (「構築原理」)。そのさい彼は、とくに“対称的な”電子配置になったところで殻が閉じるというような見方を用いたりしている。とにかく、こうして彼は原子内電子の殻状構造と量子数のわりあてを結果としてかなり正しく与えることが

できた（1921）が、これをさらに精確にしまた基礎づける面では難渋した。（ボーアの結果はやがてストーナー E. C. Stoner によって修正されることになる。）しかしとにかく、これは前期量子論の一つの顕著な成果といってよい。

平均場の考えと「構築原理」はある程度まで対応原理的根拠をもつことであるが、(29) このボーアの進み方はなお多分に経験的・推量的な性格をもっている。実際スピンと排他律の認識なしに原子構造とスペクトルの辻褄をあわせるにはいろいろ‘こじつけ’に類する説明によることになり、それらはいずれは大幅に改変されねばならないものであった。そしてボーアが当時、重い原子の内部で運動するたくさんの電子の軌道を見てきたように精細に図示したりしているのもナイーヴなものといわねばならない。

とはいっても、ボーアの前述の対応原理および、いまふれた原子構造論は、当時の不完全な理論でもって多くの有効な結果をさぐり出していくというボーア一流の進み方をよくあらわしている。

なおボーアのモデルによって周期律が一応理解されるが、当時このモデルに対立的なものとして電子の静的な配置（とくに立方体の8個の頂点への配置）を考えるリュイス G. N. Lewis の8つ組モデル（octet model）が出されていた（1916）ことも付言する要がある。一対の電子が2個の原子に共有されることによって化学結合が生じるとする彼の着想は、ナイーヴながら化学結合に関して一つの真相を言い当てたものであることがのちになって明らかになる。

前期量子論の時代に、これまでにふれなかったようなさまざまの問題ももちろん考究されている。たとえば磁性が結局ゼロになるという古典論の困難は、量子論では解消する。ことに原子が固定した磁気モメント

（29） 量子力学によれば、多電子原子において個々の電子に軌道運動をあてがうボーアの「構築原理」は、電子の波動性とフェルミ統計性という二重の意味で修正を要するが、それでも原子の場合“独立軌道”の波動関数というものが近似的な意味をもちうるのである。

をもつという考えで常磁性物質の磁化率に対するキュリー P. Curie の法則を説明したランジュヴァン P. Langevin の先駆的な理論（1905）は、いまや量子論によって正当化され、固定した磁気モメントというモデルのなかに、じつは h が潜在していたことが認識される。二原子分子のバンド・スペクトルなどもかなり発展させられた問題である。この問題に応用するために非調和振動子の量子化もなされた（クラッツァー A. Kratzer、1920）。

ほかに原子による電子の弾性あるいは非弾性散乱とか、金属の諸性質、強磁性、化学結合、原子核と放射能等々、電子と原子に関連するさまざまの問題が存在するわけであるが、前期量子論をもってしては、これらの本質を解明することはほとんどできなかった。

ボーア－ゾンマーフェルト理論は第一次大戦中から戦後の時期にかけて進展した。一般的進歩が戦争のために阻害されたことは明らかである。物理学者の多数が戦争に、あるいは戦時研究に動員された。すぐれた二、三の学者（モーズリー、シュヴァルツシルト、ハーゼンエール F. Hasenöhrl）は戦（病）死した。そして再び平和がかえってきたとき量子論は――一般相対論とともに――にぎやかに迎えられ、やがて進歩のテンポをはやめることになる。敗戦国ドイツのすでに60歳のプランクに（1918年度の）ノーベル賞が与えられ、ついでアインシュタイン（1921）、ボーア（1922）がやはり量子論で順次ノーベル賞を得た。

戦後まず現われた記念すべき著作は、一方でボーアの「線スペクトルの量子論」と題する長大な綜合的労作であり、他方ではゾンマーフェルトの『原子構造とスペクトル線』という本であった。前者の第Ⅰ・Ⅱ部

---

(30) のみならずゾンマーフェルトはミュンヘンから多くの弟子を巣立たせた。物理学者の場合、研究者としてすぐれており同時に直接多く弟子を育てたというケースは多くないのだが、ゾンマーフェルトは両方にもっとも成功した例とされる。ただし彼の場合、弟子を伸ばそうとするあまり、人の仕事をスクープしたという類の話がクチコミ的に伝わっている。もっともこの種の rumor は彼に限らないし、そういうこともまた研究の“交流”、“競争と協力”の一つの面ということになるかもしれない。

は対応原理の考えを含む最初の論文であったが、デンマークのアカデミー紀要に発表された（1918）ため当初あまり流布しなかった。後者は初版が1919年に出版され（第2版，1920；第3版，1922；第4版，1924）、よく流通し、当時この方面の研究者のバイブルであった。ことに、やがて量子力学の建設を推進することになる当時の若い学生たちも、大抵まずこの本で量子論を学んだのであった。(30)

戦後も1922—23年ころになると、量子論の新しい本質的な研究が実験・理論両面でより豊富に出はじめることになるが、これは次章でのべる。

第5章　前期量子論の困難と発展

§5·1　ボーア理論の過渡的性格

ボーア理論は1918年ころまでにその内容がはっきりし、原子の問題において相当な成功を収めたが、出現後10年にしてその限界に達した。それが内面的不整合を含み、原子の理論としても、一般に物質の構造論としても、はなはだ不十分なものであることがはっきりしてきたのである。しかし、ちょうどそのころから実験・理論両面で新たな研究が続出しはじめ、やがて1925年夏から「大突破（ブレークスルー）」の時代に入ることになる。本章では、この革命前夜の「危機」の時期（1923—25）をあつかうことにする。

とにかく第一次世界大戦後、量子論の研究はいっそう盛んになってきた。ミュンヘン（ゾンマーフェルト）とコペンハーゲン（ボーア）がそのメッカであったが、1921年ボーアのところに理論物理の研究所ができ、またこの年にボルンとフランクがゲッチンゲンに着任してから、ここも量子論の盛んな中心地になった。この3ヵ所のほかに、なおベルリン（アインシュタイン）、ライデン（エーレンフェスト）、チューリッヒ（デバイ、シュレーディンガー）が重要であった。

戦後の発展においてとくに著しいことは、若いゼネレーションの輩出である。ことにそれは、インフレの波の荒れ狂う敗戦ドイツにおいて目ざましかった。その最も抜きんでたものは、パウリ、ハイゼンベルク、ヨルダン P. Jordan である。またオランダからはクラマース、フランスにはドブロイ、イギリスにはディラック、イタリアにはフェルミ E. Fermi が現われる。(1) やがてみるように、これらのアプレゲールの天才・秀才の一群によって量子論は精力的に推進され、いくばくもなくして、みるみる量子力学をつくり上げてしまうことになるのである。(2) 彼らはま

さに、量子力学の形成が予定されていたような時期に青春の研究生活にはいっていった幸運な世代であった。もう一つの著しい点は、戦争による後遺症を残しつつも学者の国際的な往来・交流が活潑になったことである。量子力学の発見・建設は、第一次大戦後からやがてはじまるパニックとファシズムの時代までの、比較的平和で自由な短いワイマール共和国の時代にはたされることになる。

さてボーア－ゾンマーフェルトの理論はいくばくもなくしてその限界につきあたり、同時にまた、これを克服しようとする努力から重要な新しい発展もおきることになる。ここで、この理論の性格をもう一度考えておこう。この理論の第一の部分——定常状態の存在とボーアの振動数条件——は、一般的な正当さをもつものと考えられるもので、これを基礎にして原子や分子のスペクトル・タームをエネルギー準位と同定して量子数でもって分類していくという半実験的な仕事をやっていく限りにおいては、まったく有効であった。すなわち実験から得られる分光学のデータにもとづいてエネルギー準位を量子数で整理していき、クロスワード・パズルを解くようにして種々の規則性を見つけ出していくことができる。これは「ターム動物学」とよばれる。しかし、理論の第二の部分——量子条件（4–11）——はそのような一般性・厳密性をもっておらず、これによってエネルギー準位をひき出すことに進むと種々の困難が

---

(1) 上記のうちエーレンフェスト、シュレーディンガー、パウリは出身はウィーン(オーストリア)である。ハンガリーもまたたくさんの物理学者（と音楽家）を国外におくり出した。とくにウィグナー E. Wigner とフォン・ノイマン J. von Neumann。アメリカはハーバード大学からファン・フレック J. H. van Vleck、スレーター J. C. Slater、オッペンハイマー J. R. Oppenheimer を出し、革命後のソ連からはフォック V. A. Fock やフレンケル J. Frenkel が出た。

(2) たとえばハイゼンベルクは、次のように語っている。「私は1920年にミュンヘン大学を卒業した。敗戦は、それまでに叫ばれたすべての理想を空虚なものにしてしまった。われわれは親も先生も信頼せず、自分自身のためにこの世で価値あるものを見つけだそうと欲し、その過程で科学を再発見した。科学においては何が正しく、何が間違っているかについて、自然自身によってつねに決定に到達するのである」。

生じる。

第一に、低い量子数のところでは、しばしば事実と食い違う。第二に、量子条件は変数分離が行なえるような周期的な運動（多重周期運動）についてのみ与えられているが、たとえばヘリウム原子内の運動は電子間のクーロン力を考えると、このようなタイプにはならない。したがってボーアの理論は、このような問題が厳密にどう定式化されるのかをいうことができない（この困難は前にもふれた）。しかしながら、この場合も古典的に考えて電子が空間の有限な領域に閉じこめられているような束縛状態はたしかに可能であり、そういう軌道運動に対応して量子論では、やはり水素原子の場合と同様にたくさんの離散的な定常状態が存在するはずだと考えられる。また古典論では電子が無限遠へ飛び去るような軌道ももちろん存在し、これは量子論でもそのまま許されると考えられる。このような古典論からの推察は、これまた一種の対応原理なのであるが、いまの場合、それを明確に定式化することが困難である。

一般に定常状態は古典的な運動から量子条件でえらび出されるわけであるが、古典的な運動が厳密には解けない場合を近似的にあつかう一つの方法として、天文学で知られている「摂動論」[(3)]が原子の問題に導入され、ボーアやボルンらによって研究された。この方法は有効なこともあるが、光の分散や2次シュタルク効果に適用してみると、すでに実際と合わない（このことについては§5·3にのべる）。さらに、この摂動論を上記のヘリウム原子の問題に適用してみると、結果は実験と大きく食い違った（ボーア－クラマース、ボルン－ハイゼンベルク）。

一般的にいって、スペクトル線の配置（振動数分布）をターム（エネルギー準位）に解析し、タームをさらに分類していく仕事と、ボーア－ゾンマーフェルト理論の基礎からタームを演繹する仕事との間のギャップを克服するための努力が必要である。

そのために理論の修正がさまざまの方向に試みられる。相対性理論の

---

(3)　この摂動論の方法は、のちの行列力学と波動力学へ新しい形でひきつがれ、そこで重要な役割をはたすことになる。

効果を入れてみるとか、量子条件を修正するとか[4]、原子内に働いている力として新しいものをつけ加えてみるとか等々。このような、なんらかもう少し複雑な運動の可能性をさぐる試みは、半ば困難の性質から示唆され、半ば試行錯誤的になされるであろう。そして問題の性質によって有意義なこともありうる。

元来、古いローレンツ的な理論では、水素原子がたくさんのスペクトル線をもつことがそれに応じるだけの振動電子を考えて理解されたものを、ボーアの理論は、ただ1個の周回電子をもつところの、構造的により簡単なラザフォードの模型から導けるものにしたのであった。他の原子に関しても同様の事情があり、その場合スペクトル線の多くを1個の"光る電子"の遷移で理解することができる。しかし、もう少しくわしく広く実験事実をしらべてみると、事実のほうが再び理論よりも豊富でひだの多いものであった。水素について、また多電子原子について、スペクトルの微細構造、異常ゼーマン効果などがますますくわしく観察されてくる。そこで、これに応じるために必要なことの一つは、電子に新しい自由度を付与することであることが次第に明らかになってきた。すなわち電子は単なる質点ではなくて、なんらかの内的な自由度(「スピン」)をもつとされることになるが、これについては次節でのべる。

しかしながら、ボーア理論の根本的な性格については、ほかにもっと反省してみなければならない点がある。この理論はとびとびの定常状態と遷移という量子論特有の考えを出発点としながら、定常状態においては電子が古典力学の法則に従って軌道運動するという描像を呼びかえした。このことは、この理論が古典論と、本来これに矛盾する量子の考え

(4) とくに著しいのは、半整数量子数の導入である。二原子分子の振動準位のモデルとしての振動子について、かつてプランクが「第二理論」で達したように、半整数の"ゼロ点エネルギー"を加えて $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu$ としたほうが実験(同位元素効果)とよく合うことが見出された(マリケン R. S. Mulliken、1924)。二原子分子の回転準位についても、半整数量子数を用いるほうが実験とよく合うことは前にのべた。ほかにも半整数量子数はいろんなところで有効である。あとでのべるスピン量子数もその一つである。

とから折衷的に構成されているということであり、理論が過渡的な性格のものであることを示すものである。(5)「ボーアの原子は古典論というゴシック風の土台の上に立ったバロック風の塔」(ボルン)に似ていた。

すでにのべたように、この第一の部分(とびとびの定常状態の存在とその間の遷移)は一般性をもつものであったが、これだけでは定常状態そのものを理論的に定めえないので、この点を補うために古典的な軌道運動の描像にもとづいた量子条件を援用せざるをえなかった。このような、量子の考えと本来とけ合わないような部分がつぎ木されているということは、理論の発展の基本的な動機としてとらえるべきことである。したがって、このような理論を固定した形で考える限りは、それは間に合わせ的なものといわねばならず、正しい量子論——それはまだ未知であるが——のひどくゆがんでモデル化された、そしてなお断片的・彌縫的な模写にすぎないであろう。これが水素原子のエネルギー準位(低量子数の場合にも)やその他いくつかの問題で正確な結果を与えたということは、むしろ半ば問題の特殊性に幸いされたものとみねばならないのである。事実、他の問題では実験結果との食い違いがみられる。たとえばパウリは、水素原子よりもこみいった1電子問題の例として、水素分子イオン(H_2^+)のエネルギー準位を計算したが、結果は実験と合わなかった。

さらにこの量子条件は、それが有効な場合でも、縮退のある場合にちょっと物理的に奇妙な結果をもたらす。たとえば前の自由な水素原子の問題では、方向量子化という縮退が出てきた。しかし別に磁場もかけていない場合には、空間は等方的で元来座標軸のとり方は勝手なのであって、許される運動がこのような勝手な座標軸の方向と一定の角を張らね

---

(5) このような性格は、最初のプランクの熱輻射論の場合も同様であった。しかし、プランクが量子を古典論に同化させようと努力したのに対して、ボーアは次第に、むしろ「このコントラストを強調することにより、やがてはこの新しい理論のなかに、なんらかの一貫性をもたらすことができよう」という方向で考えるようになった。

ばならぬということは迷理的である。これは軌道運動をあまり実在的なものにうけとることを疑わしめることがらである。また同じく自由な水素原子の場合、定常状態は極座標でも抛物線座標でも解けるが、両者で励起状態の量子化された楕円軌道はちがっている。こういう場合、楕円軌道の形(すなわち短軸の長さ)などが物理的意味をもつとみることは疑わしい。(ただしエネルギー・スペクトルや縮退の数などは両方で一致するので、たしかに物理的意味をもっている。)

さかのぼって、もとのボーアの量子化された円運動というようなものさえ、文字どおりうけとりがたい。気体運動論などからして基底状態の原子は、個々に、むしろなんらか球対称的なもののようにみえる。あるいはまたボーア理論において、原子内電子が遷移するさいには描像を捨てろというが、もしこの遷移がフランク-ヘルツの実験の場合のように電子との非弾性衝突によっておこる励起の場合には、描像を考えるべきか捨てるべきかわからなくなる。

ボーア-ゾンマーフェルト理論が定常状態に対して軌道運動の描像を残しているということは、この理論にとってはまさに必要な本質的なことであった。なぜなら、これによって古典論とのリンクが維持され、これによって量子条件自身を書き表わすことができたのであり、さらにはそのフーリエ成分によって遷移確率を与えることもできたからである。にもかかわらず、この軌道運動をあまり文字どおりにうけとると上記のような逆説的なことがいろいろおきるということは、この理論のになっている深刻なディレンマである。

しかも、この理論は、まだミクロの領域で古典論にすっかりおきかわるものと主張しうるほどの普遍性・包括性をもってはいない。第一に、この理論は周期的な運動については、運動がどのように作用量子によって制約されるかを示しているが、そうでない非周期的な運動については、作用量子を考慮するすべを知らず、単に暗黙裡に古典論がそのまま成り立つだろうとしていることである。たしかに、この場合、とびとびのエネルギー準位というものは現われないし、電場・磁場による電子線の屈曲やラザフォードの散乱の問題で古典論の計算は一応正しい結果を与え

たが、じつは電子が急激な力の場を通るような場合には、古典論からの食い違いが現われるのである（第8章参照)。

第二に、すでにのべたように、量子条件は本質的に変数分離が行なえるような多重周期運動についてしか表現されていない。

そこで、この理論をなんらかもっと一貫した、かつ普遍性をもった新しい理論でおきかえる必要性が次第に強く意識されるようになった。そのためにどういう方針で進むべきかについては、§4·4 で遷移確率を算出するのに用いた対応原理の考え方を徹底していくことが一つの有力な指針となる。それは、一般的にいって次のようなものになるだろう。

いったい、もともと遷移に関して見出されたいくつかの関係式——(3-12)、(4-9) や後出の (5-9) など——は、もっぱらエネルギー（と運動量）の保存を意味する関係であった。将来の完全な理論においては、エネルギーと運動量の保存ということはもちろん含まれるべきであるが、さらにその根底に、系の時間的な変化を規定する運動方程式に相当するものがなければならぬだろう。元来、ボーアの理論は古典的な運動方程式を定常状態に妥当するものへと局限し、遷移をこれから切り離した。しかし遷移のおこり方を与えるためには、なんらかの仕方で“遷移をも規制し媒介するような運動方程式”ともいうべきものが必要であり[(6)]、これによって、どのような遷移が、どのような頻度でおきるかが——すなわち強度が——計算されると期待される。

ところで、古典的なマックスウェルの理論は、運動方程式を基礎とした論理的に閉じた一つのダイナミカルな理論であって、強度や偏りに関して（実験と合わずレーリー発散のような困難をもたらすことは措くとして)、ともかくそれなりに完全に答えることができた。したがって、われわれは量子論の立場でこれらの問題に答えるための手掛りは、この理

---

(6) 一般に遷移には、前にのべたようにいろんな場合があるから、“遷移を規制する運動法則”なるものは本来相互作用の性質に依存するものである。§4·4 において、また以下の節で主として問題にするのは原子の発光の場合であるので、それは原子内電子と輻射場との相互作用の性質に依存するものである。

論を古典論と対比させることから得られるべきであり、さらにこのような対比を追求してゆけば、単に個々の場合について有効な結果を得ることができるのみならず、それを通して真の量子論における運動のあり方、“運動方程式”そのものをうかがうことさえ期待されよう。

われわれはすでに、これまで量子論において古典論がどのように利用されたかを知っている。すなわち、定常状態において古典力学に従う軌道運動を行なうという考えであり、その考えを量子条件の表現と強度の計算とに活用した。このような考えは量子論の本来の考えとうまくとけ合わないものであり、その点で間に合わせ的なものであるが、しかもこのような不整合のなかに理論の発展の動機がとらえられるべきことを前に注意した。合理的な量子論の体系をさぐりあてていくために従来の理論——古典論——は否定されねばならないが、単にこれをすっかり放棄してしまうというのでは手掛りが得られない。量子の世界はマクロの世界と単に異質的であるだけでなく、これと連結するものである以上、量子の世界の法則はマクロの世界を支配する古典論と一定の移行・対応の関係に立つはずである。したがって、われわれは量子論を発展させるために、既知の古典論をできるだけ利用しつつ、そのさい古典論の適用限界、古典論の利用ということの対応論的性質をはっきりとらえ、古典論を踏み台にして新しい一貫した理論に乗り移るという方針で進むことができよう。このような方法が対応原理の精神である。

古い量子論に現われたいろいろの困難を克服するために、前にもふれたように、さまざまの試みがなされる。しかし、それらが単に試行錯誤的にばらばらに進められるだけでは将来の理論体系を見つけだすのに必ずしも有効ではないであろう。そのためには、指導原理というべきものが——それによってあまり大きな任意性なしに真の理論に乗り移ることを可能にするようなものとして——必要である。このような役割をはたしたものが、まさにこの対応原理であった。

ここで量子力学の形成におけるもう一つの指導的な考えをあげておこう。それは対応原理と密接に関連する、広い意味での「相補性」の考え方であった。これは、一般に対立し矛盾するような二つの面を統一的に

把握しうるような形にもたらそうとする努力を意味する。このような対立する二つの面が現われるということは、そのいずれもが本質的なものではなく、それらを否定的に統一するいっそう本質的な論理構造が存在し、これから両者が媒介されるようなものであることを示すものである。したがって、矛盾する二つの面のいずれか一方のうちに他方を還元してしまうことによって困難が解消することを期待するのではなく、この対立の分析から、これらを否定的に統一する、より本質的な法則、論理構造を認識することによって解決されるべきである。

ボーア理論における、定常状態における古典運動と不連続的でイメージの描けない遷移という二つの異質的な対立した運動形態を統一しようとする努力が、密接に対応原理的推論とからみあっていることは以下でみる。(7)

とくに重要なのは光の粒子性と波動性の矛盾であり、前期量子論はこれを解決することができなかった。光について、さらには電子について、波動性と粒子性の対立の分析がどのように理論の形成に働いたかについては第7章以後においてくわしくのべる。こうして対応原理とともに相補性は、(8)出来上がった量子力学に含まれる原理または解釈である（第11章参照）だけでなく、量子力学の形成におけるガイディング・プリンシプルという意味をもっていたのである。

§5•2　スピンと排他律

量子力学の形成過程においてラザフォード模型の成立や原子番号の意味の認識が重要な実体的基礎を与えたことはもちろんであるが、ほかに「実体の導入」という意味あいを含んだことがらとして光量子と電子ス

---

(7) ただし、定常状態と遷移の統一的把握には波動力学的なアプローチとの協力をまたねばならなかったことはのちにみる。

(8) 「相補性」という言葉は、量子力学の理論形式ができてから、その解釈にさいしてボーアが用いたものであったが、ここでのべたような広い意味での相補性は、それまでの発展のうちに働いていることを見落としてはならない。

ピン、またあとでのべる物質波の観念の認識がある。量子はラザフォードの模型に入ってきた新しい法則なのであるが、他方、量子自身が光量子においては実体的な現われ方をすることについてはすでにのべた。電子スピンもそういう側面をもっている。さらに光量子も電子スピンも、$\hbar \to 0$ の極限では消えるような純量子論的概念であるという点でも共通性がある。(電子スピンは角運動量ではあるが、その大きさが軌道角運動量の場合とちがって $\hbar/2$ に固定しているために、$\hbar \to 0$ の極限で消えるわけである。)とにかく光量子にしてもスピンにしても、はたまた物質波にしても――シンプルに現われるような場合もあるけれども――じつはいずれも摩訶不思議なものであって、その本質がそうたやすくは捉えられるものでないことを警告しておかねばならない。次にスピンの発見の経過について簡単にのべ、あわせてそれにからんできた排他律にもふれる。(9)

スピンを示唆する事柄はいくつかあったのであるが、ゾンマーフェルト(1920)がアルカリなどのスペクトルの多重構造と異常ゼーマン効果を記述するために、なんらか角運動量の性質をもつ「内部量子数」j を経験的に導入したことが出発点となったといってよい。(10) この"第四の"量子数 j はアルカリ原子では $l \pm \frac{1}{2}$ という値(ただし $l=0$ では $\frac{1}{2}$ のみ)をもち、そのスペクトル・タームの二重性(doublet)と、そのおのおのが外から(弱い)磁場をかけたさいに $2j+1$ 本に割れること

---

(9) スピンと排他律の発見の過程は、人々の立場の相違が相克しそれぞれの情念が渦巻く面白いドラマであるが、ここではあまり詳細に立ち入らない。

(10) 先にゾンマーフェルトが水素スペクトルの微細構造を相対論的質量変化によって説明したことをのべたが、アルカリの微細構造は副量子数 k のちがいとしては表わせず、その記述に新しい量子数を必要とする。

(11) j がなにか角運動量の大きさに関する量子数であるとき、それに対応する磁気量子数 m_j は、方向量子化の規則によって

$$-j,\ -j+1,\ \cdots\cdots,\ j$$

なる $2j+1$ 個の値をとる。この規則自体が j に整数および半整数を許す一つの理由になる。なお、いま k のかわりに $l=k-1$ を用い、4個の量子数として (n, l, j, m_j) をとることになる。

とを記述することになる。[11] ヘリウムやアルカリ土原子の場合は1重項と3重項であるが、このことは1重項では $j=l$、3重項では $j=l$、$l\pm1$ なることとして記述される。この量子数 j はまたX線スペクトル・タームの多重性を分類するにも有用であることがわかった。

さらに原子の“芯の角運動量”を想定し（これを表わす量子数を s と書く。これがタームの多重度に関係する)、これと“光る電子”（これは価電子のうちの一つである）の軌道運動による角運動量とを合成した全角運動量の量子数が先の j であるとみる解釈が進められた。とくにランデ（1921）は「ベクトル・モデル」とよばれる方法で角運動量ベクトルの量子論的な合成法を行なった。

そのころスペクトルの実験的研究はいっそう盛んになり、多重構造についてはカタラン M. A. Catalan の、またゼーマン効果に関してはバック E. Back の仕事がなされた。これらにもとづいてランデは、芯が角運動量と磁気能率をもつという上記の見方（「磁気芯モデル」）にたって分析をさらにおし進め注目すべき成果をあげた（1923)。一つはスペクトル・タームの微細構造について「間隔規則」を導いたことである。もう一つは異常ゼーマン効果を与える公式を導いたことである。[12] それによれば異常ゼーマン効果が生じるのは、芯についてその「g-因子」(磁気能率と角運動量の比）が軌道運動の場合のそれと異なるためであって、彼は実験との比較からこの因子がちょうど2であることを見出した。

当時パウリもまた異常ゼーマン効果の分析に取り組んでいた。異常ゼーマン効果の模様は通常の弱磁場から強磁場へと移っていくとき変わってくる（“パーシェン-バック効果”）が、彼はとくにこの点をしらべた。こうしてパウリは、1924年末にいたって量子数を芯に帰する見方を批判し、閉殻は角運動量をもたないと結論し、そのかわり磁気量子数 $m_s=\pm\frac{1}{2}$ を“光る電子”自身に移しかえ、そのことを慎重に電子自身が

---

(12) ランデは、普通の l、s、j などの量子数のかわりに、それらから $\frac{1}{2}$ ずれた量子数を使っているが、そのことが l^2 などを量子力学的な $l(l+1)$ などで置き換えることを代行している。

“非古典的二値性”をもつという言い方で表現した。いまや、j、m_j も“光る電子”自身にあてがわれる量子数となり、芯の異常な g-因子“2”も電子に移しかえられる。

この新しい見方は、多電子系の問題を考えなおす転機を与えた。当時まで多電子系の問題は多くのもやもやしたあいまいさをともなっていた。前述のボーアの原子構造論が一応形をなしたとはいえ、多くのことが説明できなかった。電子間にはなにか非電磁的な力が働く——というよりは、むしろなんらか非力学的な拘束が働く——かのごとくである[(13)]、あるいは個々の電子の明確な軌道運動という描像自体がそこではいっそう疑わしくなってくる、というふうにうすうす感じられたが、それは捕捉しがたいことがらであった。しかし、パウリが電子自身の固有の二値性を結論したとき、彼はボーア流の原子構造論において殻を閉じさせ周期律をもたらすには、対応原理では十分でなく、別に“排他律”とよぶべき非常に簡単な原理がはたらいているということをさぐり出すのに成功した(1924年12月)。すなわち、原子において個々の電子の状態が4個の量子数によって指定され(これはスピンの上下の状態をも勘定にいれたことになる)、その一つに同時に2個以上の電子が入ることはできないということである。この規則は、もちろん励起状態をも支配し、したがってスペクトルの構造にも当然反映するわけであるが、実験と比較してそこにも反例がみられないことをパウリは確かめた。

そのころアメリカからやってきた若いオランダ人クローニッヒ R. de L. Kronig が、パウリの“電子の非古典的二値性”を実体化し、その背後に電子の自転の描像を設定することを思いついてしゃべった。パウリは直ちにこれをくじき、この大それたアイディアを若芽のうちにつみとった。電子の自転などといういかがわしい古典的モデルをおくことは、彼の二値性の考え方の精神に反するばかりか、幼稚なものにみえた[(14)]。

(13) ボーアは「非力学的強制」というやや神秘的な言葉をもちこんだりしているが、この言葉が暗示するかもしれないような予言的 (prophetic) な内容をもっていたわけではない。

ところが1925年10月になって、ライデンでやはり若いオランダ人のハウシュミット S. Goudsmit と ウーレンベック G. Uhlenbeck が先のクローニッヒのと同じ考えを出したときは、日の目をみることになった。それが *Naturwissenschaft* 誌に発表された「非力学的拘束の仮設を各電子の内的なふるまいに関する仮定でおきかえること」という、まわりくどく、へりくだった表題をもつ１ページの論文である。これは原稿がエーレンフェストに手渡された段階で、にぎやかに取沙汰された。そしてその２ヵ月後には第二報がボーアの熱い支持を得つつ、こんどはずばり "spinning electron" と題して12月に書かれた。

電子は自己の軸のまわりに回転し、その角運動量の大きさは $\hbar/2$ なるただ一つの値に "量子化" されており、それはある方向に対して方向量子化され、その方向へのスピン角運動量の成分が $\hbar/2$ なる状態（右回り、あるいは上向き）と $-\hbar/2$ なる状態（左回り、あるいは下向き）のただ二つの状態のみが許されると考える。かつまた電子は、このスピンに付随して $2\times\frac{1}{2}=1$ 単位（すなわちボーア磁子）の固有の磁気能率をもち、そのため、相対論的理由によって電子のスピンが同じ電子の軌道角運動量と結合するとする。この考えで先のランデの理論を書きかえることによって、彼らはアルカリの微細構造の値をランデの場合よりも正しく出すことができたが、なお実験とちょうど因子２だけの食い違いが残った。じつは、この点がこの仮設の致命的な難点として以前から他の人々が気づいていたところである。

ところが、やがてトーマス L. H. Thomas (1926年２月) が、電子の大きさを表てに出さないやり方で、古典的に自転に関する相対論的効果をより注意深くあつかうことによって、この食い違いがちょうど除去されることを示すにおよんでついにパウリもかぶとを脱ぎ、自転のモデル

(14) そもそも電子の自転ということは、電子をもしボルンの意味での "相対論的剛体" とみるならば おきえない。さらにローレンツの 古典電子半径をもつ球電子のようなものが $\hbar/2$ の自転角運動量をもつと、その電子の表面は超光速度をもつことになり、再び相対論と矛盾する。

がどうやら広く信用を得た。[15]

また、得られたアルカリの微細構造の式は、水素のそれに対するゾンマーフェルトの式とほとんど同じになる。このような密接な関係があることは、結局、水素の微細構造が、ゾンマーフェルトの式と一致はするが、じつはやはりスピンによるという意味で"アルカリ的"であるということによっている。この点はハウシュミットらが指摘した。[16]

多電子原子については先にのべた排他律の発見のほかに、もう一つ重要なことがらは"ラッセル－ソンダース Russel–Saunders 結合"の考えであって、これもスピンや排他律と同じころにたてられた（1925）。アルカリ土原子についていえば、まず2個の価電子のスピンが結合して全スピンSが0または1の値をとり、他方2個の電子の軌道角運動量が結合して全軌道角運動量量子数Lを与え、最後にS、Lが結合して微細構造を与えるとみる。そしてSの0と1が1重項と3重項を表わすことになる。これはスピン－軌道相互作用が電子間のクーロン相互作用に比して小さいとみなしうるときに成り立つものである。

とにかく、こうして量子力学の発見直前までに、人々がスピンと排他律、あるいはラッセル－ソンダース結合を認識し、前期量子論的概念と方法を拡張駆使することによって、いわゆる（水素以外の）"複雑スペクトル"（complex spectra）と、そのゼーマン効果までほとんど正しく解析するに至ったということは、あとからみてかなり驚くべきことである。それは、量子数が正しく指定され、角運動量の合成則がとらえられ、選択則も正しくあてがわれたというにとどまらず、上述のランデの公式

（15） もっとも、これがスピンの自転モデルの完全な正当化になっているわけではない。

（16） スピンの発見についてはここで少しくのべたように、トーマスに至るまでにこみいったいきさつがあり（それ以後さらに曲折をへることになるが）、クレディット（credit）の問題は微妙である。他の場合についても、しばしば研究者間の競争ははげしく、クレディットにかかわる裏話は多い。これは今も昔もそうかわらない。

やスペクトル線の強度則[17]のような、間隔や強度比を量子数によって表わすいろんな公式をも含んでいるのである。もっとも、その多くは、あとから見れば群論的な理由にもとづくものとみうるようなものである。すなわち多重構造は、スピン－軌道相互作用が小さいために回転対称性が電子のスピンと軌道運動について（近似的には）独立に成り立つということと、回転群の表現 $D_L \times D_S$ がスピン－軌道相互作用により既約な要素 D_J（$J=L+S, L+S-1, \cdots\cdots, |L-S|$）に分離されることとによっている。ゼーマン効果とパーシェン－バック効果は、外場による対称性の破れ方と、それによる縮退の解除のパターンの差によっている。また水素の１次シュタルク効果は、外場による水素に特有な高次の対称性（$O(4)$）の特定の破れ方と、それにともなう縮退の除去による。

これらに対して、たとえばヘリウムやアルカリ土原子の１重項と３重項の間のひらきは、力学的なスピン－スピン相互作用とみなすには大きすぎ、前期量子論の時代にはそのオリジンを正しくとらええなかったものに属する。

スピンと排他律と次章でのべるハイゼンベルクの新理論の三つは、じつは同じころに相前後して、前期量子論の骨頂において、独立な三つの仮設として登場したのである。そしてスピンと排他律は、やがて量子力学のなかにその基本的な構成要素としてとり入れられることになる。一見、簡単で子供っぽいアイディアのようにみえ、しかも同時に神秘的なものにもみえるスピンと排他律が深遠な理論的意味をもつことは、その後の発展でだんだん明らかになっていく。ここでは、ただ次の点を注意しておこう。

後からみればスピンは水素の微細構造のほか強磁性や原子価結合等々おびただしいことがらを司っているわけだが、前期量子論的立場においてはアルカリの微細構造がスピン発見のもっとも有力な端緒となりえた

(17)　当時スペクトル線の強度比の精密な測定が進行しており、オルンシュタイン L. S. Ornstein、ハウシュミットとクローニッヒ、またヘンル H. Hönl らにより、種々の強度則が見出された（1924—25）。

ということである。しかし、たとえば次のように考ええたかもしれない。

光量子説では、光量子自身が偏光に相当する性質をもっておらねばならないことになるが、円偏光は光量子の固有の角運動量に相当する。そこでもし光量子と電子とのアナロジーをおし進めるならば、電子がスピンのような性質をもつことも予想されないことでもなかったろう。ただし、それが $\hbar/2$ という半んぱな値をもつことの深い意味は、のちに解明されることがらである。

次に排他律は原子内電子に関して発見されたわけであるが、任意の多電子系につねに当てはまる普遍的な原理である。原子や物質の安定性を支える原理として、量子の原理や保存則に加えて、さらにこの排他律が必要なのである。

排他律は1個の電子の関知しないことがらであり、2個以上の電子についてはじめて発動するものであるが、それは力学的な作用ではなくて、全体が部分の和と同じでないという量子力学の一般的な事態の特殊な現われ方に相当している。排他律はまた、電子が個別性をもたないということも含意しているとみなければならない。つまり、電子が互いにまったく同じであるということは、量子論においては古典論の場合以上の意味をもち、二つの量子状態のおのおのに一つずつはいっている電子を単にいれかえてみても初めとまったく同一の状態が得られるが、これは初めの状態と区別して勘定してはならず、ただ一つの状態とみねばならないということである。しかもこのように個別性をもたないということは、電子に限らず、光量子その他量子力学的な粒子に一般に当てはまることがらである。このことは同種粒子の集まりに対する「統計」にも当然影響してきて、ボース統計およびフェルミ統計をもたらす。これらの新しい統計の考えも前期量子論的概念のなかでまず登場してきたということは、歴史的に重要なことである。これについては第7章でのべる。

§5•3　光の散乱過程

光と電子の相互作用の過程として、われわれは、これまでもっぱら光の放出と吸収を問題にしてきた。実際ボーア－ゾンマーフェルト理論は、

これを主たる対象として進められてきた。しかしながら、光と電子の相互作用の過程としては、そのほかに光の散乱がある。量子論がこれをうまくあつかうことができるかどうか——しかもそれを放出や吸収と統一的な仕方であつかうことができるかどうか——ということは試金石的な問題となる。ところが光学的な領域の光の散乱の問題のあつかいが、原子内電子についてのボーア流の軌道運動の描像を解体にみちびく契機となるのである。

原子による光の放出・吸収と光学散乱との一般的なちがいは、前者が線スペクトル的であるのに対して、後者は入射光の振動数 ($\omega=2\pi\nu$) とともにむしろ連続的に変わること、つまり分散と共鳴として現われることである。

一般に光が原子にあたった場合にどういうことがおきるかを考えてみよう。光の振動数 ω が小さい（波長が長い）間は、もっぱら散乱がおきるであろう[(18)]（これは原子の外殻の価電子による）。そのさい ω を変えていくと ω とともに散乱の強さが変わり（分散）、しかもところどころで共鳴がおこって、その付近で散乱強度はピークをもち、同時に吸収がともなう[(19)]。さらに ω を増していくと、イオン化としての吸収（光電効果）が優越するようになり（これは原子の内殻の電子についておきる)、電子が連続スペクトルの状態へたたき出される。さらに ω を増していくと、電子が束縛されていることの影響は小さくなって、ほとんど自由な電子による散乱（あとでのべる「コンプトン散乱」）が主になる。これら光電効果やコンプトン散乱の領域では、もはや共鳴のようなものは現われず、

---

(18) この散乱はほとんど弾性散乱（広義のレーリー散乱）だが、一部非弾性散乱も含まれる。そこでは原子がもとの準位から別の準位に移り、それに応じて散乱光の波長が入射光のそれからずれる。このような散乱の存在はスメカル A. Smekal が予見し (1923)、のちにラマン C. V. Raman が実証した (1928)。

(19) もし原子がはじめ励起状態にあるならば、共鳴のところで吸収だけでなく誘導放出もともなう。

(20) 入射光の ω がさらに増すと、電子－陽電子対発生が主となることがのちに見出された。これは原子核のクーロン場によるものである。

ωへの依存性はなめらかである。[20]

ところで古典的な光の波動論すなわちマックスウェル－ローレンツ理論は、光の散乱の問題に関して一般的にいって合理的な結論を与えていた。波動論では、入射する光の波が電子を強制的にゆすぶり、ゆすぶられた電子がまわりに球面波をうちだすという機構で、光の散乱がおきるのだから、散乱光の振動数は入射光のそれと等しいはずであるが、これは一般に事実と一致している。さらにこの考えで散乱光の強度も算出される。すなわち、まず1個の自由な電子による光の散乱[21]は、微分断面積でいってトムソンの公式

$$\sigma(\theta)=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos^2\theta}{2} \tag{5-1}$$

で与えられる（ここに入射光は非偏光とし、散乱角をθと書いた）。あるいは全断面積は

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}r_0^2 \qquad \left(r_0=\frac{e^2}{mc^2}=2.8\times10^{-13}\mathrm{cm}\right) \tag{5-2}$$

となる。[22]（5-1）、（5-2）は入射光の振動数ωによらない。次に原子内で電子が弾性的に束縛され、$\omega_n/2\pi$ なる固有振動数をもつ振動子としてふるまう場合には、振動数ωの光が入ると電子は

$$x=\frac{e}{m}E\cdot\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2}$$

なる振幅で強制振動し（Eは入射波の振幅）、分極率

$$\frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2} \tag{5-3}$$

を与える。なおこの場合、電子の加速度は

（21）光の散乱は自由な電子でもおきるが、光の放出や吸収は自由電子によってはおきえない。古典的に考えても、電子が力をうけて加速度運動をしているときにだけ光を放出する。

（22）原子によるX線の散乱の場合には原子内電子を自由電子のようにみなし、それらがインコヒーレント（非干渉的）に散乱すると考えてよい。かつてトムソンはこう考えることによって原子内電子数Zを推定したわけである。

$$\ddot{x}=-\frac{e}{m}E\frac{\omega^2}{\omega_n^2-\omega^2}$$

であり、散乱の全断面積は

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}r_0^2\frac{\omega^4}{(\omega_n^2-\omega^2)^2} \tag{5-4}$$

となる。こんどはσはωによることになる（もちろん$\omega_n\to0$では（5-4）は（5-2）に近づく）。(5-4) で $\omega\sim\omega_n$ の付近ではσは大きくなるが、これは共鳴領域であって、ここでは減衰項を無視できず、(5-4) は

$$\sigma\propto\frac{1}{(\omega_n-\omega)^2+\gamma^2/4}$$

の形となる。そこでは吸収がともない、これと散乱との間に密接な関係があることがわかる。

実際ドルーデ（1900）らは、原子にはその各吸収スペクトル線の振動数と一致する固有振動数 ω_n をもって弾性的に束縛された多数の電子が含まれているとし、そのおのおのによって光が上記のように散乱されると考えて、有効な分散公式を導いていた。すなわち ω_n なる“吸収電子”[(23)]の数を N_n とするならば、(5-3) により原子の分極率は

$$\alpha=\sum_n\frac{e^2}{m}\frac{N_n}{\omega_n^2-\omega^2} \tag{5-5}$$

となる。[(24)]

さて、この原子による光の散乱の問題はボーア理論ではどう考えなおされるだろうか？　一つの考え方は、光については波動論の立場に立ち、入射光をボーアの軌道運動する電子に対して外から働く摂動ポテンシャルとみることである。しかし、そうすると共鳴は入射光のωが電子の軌道運動の振動数に等しくなるところでおこるはずだが、実際はωが原子

---

(23)　これはむしろ「分散電子」とよばれる。いずれにせよ、これにきくのは光学スペクトルの場合と同様に原子の価電子である。

(24)　単位体積中にN個の原子があるとすると、屈折率nは $n^2-1\approx4\pi N\alpha$ できまる。

の遷移振動数と等しくなるところでおこる。そのため、このような見方で得られる分散式は、長波長の領域でさえ実験と合わないことになる。

もう一つの考え方は次のようである。ωの光が入ってくると、ちょうど $\hbar\omega=E_m-E_1$ をみたすような準位 E_m があるときには、原子はある遷移確率で光量子を吸収して E_m の状態に移り、ついでまた、ある遷移確率で光量子を放出してE_1にもどる結果として弾性散乱がおきることになるとみる[(25)]。しかし、この考えをそのまま適用すると、ωを変えていったとき、ちょうど $\hbar\omega=E_m-E_1$ をみたすところでだけ散乱が共鳴的におきることになるという点で実際の分散の模様と異なる[(26)]。かつまた、単なる光量子の吸収につぐ放出という見方では、入射光と散乱光の間の位相の関係は問題にならないが、いまの場合まさにこの位相の関係（コヒーレンス）があることにもとづいて、古典ローレンツ理論は媒質による光の屈折の現象などをうまく説明していたわけであった。

とにかく分散の問題は、文字どおりにボーア理論や光量子にもとづいた考え方ではうまくあつかえない。分散のより正当な量子論的あつかいは、むしろ先にのべた古典論のやり方を次のように量子論の言葉に焼き直していくことで得られる。すなわち、もとのボーアの原子モデルをそのままとることはやめて、むしろまずローレンツ－ドルーデの描像にかえり、そこにおける実体的な古典振動子を機能化して、これを遷移振動数$\omega_m=(E_m-E_1)/\hbar$ に等しい固有振動数をもつ“仮想的な振動子”で置き換える。そして、それが外から入ってくる光の波を古典的に散乱するものとする。そのさい古典論で振動子の数 N_mだったものは仮想振動子の数だからもはや整数である必要はないので、「振動子強度」とよぶことにする。このような読みかえをして、(5–5) が妥当することになる。そこで振動子強度 N_m は対応論的な考察によってアインシュタインの遷

(25) 原子ははじめ基底状態にあるとし、それを添字1で示した。

(26) 量子力学的にいえば、光の放出や吸収が摂動の1次のプロセスであるのに対し、散乱は2次のプロセスであり、系は中間状態でエネルギーの保存しないところへいくことができるため、そのようにはならないのである。

移確率の係数と次の比例関係でつながれていることが結論[27][28]される。

$$N_m=\frac{3m\hbar\omega_m}{2\pi e^2}B_{1m}=\frac{3mc^3}{2e^2\omega_m^2}A_{m1} \tag{5-6}$$

これにより、もともとローレンツの理論において分散と吸収との間に存在していた密接な関係が維持されることになる。こうして分散の量子論の基礎が得られた。これはラーデンブルグ R. Ladenburg (1921) によるものである。

原子を調和振動子の束のようにみるボーア以前の原子の描像は、ラザフォード - ボーアの原子模型によって一度否定されたが、いまそれが機能的な代行モデルの意味で復活することになったといえる。

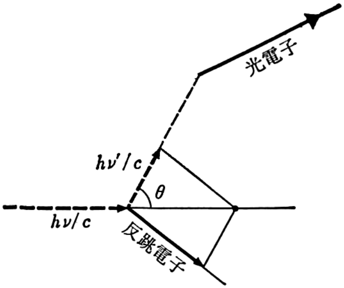
他方、原子によるX線の散乱の場合については、X線の波長が十分短いので原子内の電子をほとんど自由電子のようにみなしてよく、前述のトムソンの理論が当てはまると考えられるが、実際これはかなりよく事実と合っていた。ところが、この散乱の場合、散乱X線には入射X線よりもわずかに波長の長いものが混じっていることが次第にわかってきた。シカゴのコンプトン A. H. Compton は、これを実験的にくわしくしらべたのみならず、それが光量子の立場から簡単に理解されることを示した (1923)。

光量子論では、この散乱は光量子が電子に衝突してはねとばされることと解される。X線のような高振動数の光では $h\nu$ が大きいから、これに対しては原子内の電子は近似的に自由で、その速度も十分小とみなしてよい。このような電子に光量子が衝突するさい、光量子が (3-13) の運動量をもっているために電子も反跳をこうむり、したがって電子は光量子のエネルギーを一部もらう結果になり、それだけ散乱光量子のエネルギーは減少し、これが散乱光の波長の増大となって観察されることに

---

(27) ω_m、N_m は遷移に関係しているので、それぞれ、ω_{m1}、N_{1m} と書くほうがじつはより適当である。

(28) プランクの振動子の場合は、"仮想振動子" はもとの振動子と一致し、かつ (5-6) に (4-24)、(4-25) を用いてわかるように、$N_m=\delta_{m2}$ である。



コンプトン散乱とコンプトン－サイモンの実験。運動量の保存関係を示す。

なるわけである。これは電子と光量子の衝突において全体として運動量とエネルギーが保存されるということであって[29]、この関係を式にのせて計算すると、入射方向から θ なる角だけそらされる散乱光量子において、波長の増加は

$$\Delta\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta), \qquad \frac{h}{mc}=0.024\text{Å} \tag{5-7}$$

なることがわかる[30]。この関係は実測とよく一致することをコンプトンは確かめた。

こうしてコンプトン散乱は状態の飛躍的な変化――遷移――の一つの場合であるが、原子の発光の場合などとは少しく異なった特徴をもっている。第一に、遷移によって飛び移るべき状態（終状態）が相互にとびとびではなく、光量子が任意の方向に散乱されうることに応じて連続的に無限個のものがありうることである。第二に、このことに関連してコンプトン効果では、遷移が電子と光量子との弾性衝突として表象しうる

(29) 光電効果の場合は光量子は吸収されて、そのエネルギーがすっかり電子の運動エネルギーにかわってしまう。このさい、電子を束縛していた原子が適当に運動量を取り去ってくれるので運動量保存則がみたされ、それにともなって原子が取り去るエネルギーは、原子が重いので無視できたのである。

(30) もし電子と光量子からなる全系の重心座標系で考えたとしたら、$\Delta\lambda$ は 0 である。なお (5-7) によれば前方 ($\theta=0$) では $\Delta\lambda=0$ であって、トムソンの考えが妥当することに注意。

ので理解しやすくみえることである。ただしコンプトン効果は、必ずしも文字どおり2個の粒子（光量子と電子）が玉突きの玉のように弾性衝突する結果と解する必要はないのである。(5-7) 式は衝突の前後に関する相対論的運動学の結果であって、衝突の最中の詳細な機構に依存するものではない。

とにかく、こうして光学分散の場合には光の波動論が有効なようにみえたのとは対照的に、コンプトン散乱では光量子論が有効なようにみえる。しかし、上記のような簡単な運動学的な光量子論の考えだけでは、コンプトン散乱の強度とその角度分布というものを与えることができないことに注意すべきである（この事情は光電効果の問題でも同様であった）。すなわち、これだけの理論では、言いうることは、衝突においてエネルギーと運動量の保存の関係が成り立つということだけである。衝突がどのような頻度でおこり、きまった方向にどのような頻度で散乱されるかということを算出する手続きを得るには、なんらか電子と光量子の相互作用のダイナミックスを必要とする。

他方、同じ問題に対してトムソンの古典波動論は、このような波長のわずかのずれということを出すことはできないにしても、(5-1) 式によって散乱光の強度についても同程度の近似（すなわち波長のずれの相対値 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ が無視できるような長波長のところで漸近的に正しいような近似）で答えており、対応原理的な意味で正しい。(31)

とにかくコンプトンの発見は、当時大きな反響を与えた。というのは、アインシュタインの光量子の考えは彼自身によって再三用いられ発展されてきたのであるが、波動論との矛盾のために、いまだに必ずしも真剣

(31) じつは波長のずれということも、波動論の立場である程度説明できる。すなわち入ってくる光は古典波動論においても運動量をもっており、それが連続的に電子に移され（輻射圧に相当する)、そのため電子は次第に加速されることになり、これによって実験室系で観測される散乱光の振動数はドップラー効果のため (5-7) 式に相当するずれをもつことになる。このような説明は対応原理的な意味でのみ正しいのであって、次にのべるコンプトン－サイモン Compton-Simon の実験では、光量子の運動量は連続的にではなく不連続的な遷移として移される。

には受け入れられていなかったからである。ローレンツやプランクはもとよりとして、ボーアもこれをあくまでも「発見法的な見方」としてしか受けとらなかった。しかるに、いまやコンプトン効果は、あらためて光の粒子性を従来以上に迫真的なものとしておし出すことになり、光の二重性のディレンマは簡単に回避してすむ話でなくなった。そこでボーアらもようやくこの問題を真剣にとり上げ、輻射の機構を突っ込んで考察するに至った。(32)

まずアメリカからやってきたスレーター（1924）が、光の粒子性と波動性を融和させるために次の見方を出した。原子は定常状態にある間も常時、遷移振動数をもつ仮想振動子から発する仮想輻射場によって他の原子と交信している。この仮想場は光量子に対する一種の嚮導波であって、その強さによってそこにある原子による光量子の吸収や放出の確率をきめる働きをするのである。

これに対するボーアの反応は，前述のクローニッヒに対するパウリの場合とは少しちがっていた。ボーアとクラマースはこの考えにのりつつも、スレーターをおさえてこれを修正し、そこから光量子を消し去った。すなわち仮想場は単に原子の遷移を確率的に誘導するのであり、それによってエネルギー保存則が統計的に成り立つことを保障するように働くとする。けだし、これまで実験事実から光量子を結論する議論は、光電効果にしろコンプトン効果にしろ、いつも個別過程にエネルギー－運動量の保存則を適用することにもとづいている。そこで要素過程についてこれらの保存則を捨てることによって、同時に光量子自身も流してしまい、こうして光の二重性のディレンマを解消することができるというわけである。

これはかなりグロテスクな考えといわねばならない。エネルギー保存則というものは物理系の安定性にかかわることであって、そう簡単にゆ

---

(32) コンプトン効果の発見は、当時ボース N. Bose の光量子に対する新しい統計の考えとか、ドブロイの物質波の考えにも刺戟となっている。これらについては第7章でのべる。

るめることはできないものなのである。ただ、この理論が古典的な因果律を否定し、確率的なものでおきかえようとする立場をはじめて実際に試みたことは注目してよい。[33]

さいわい、このボーア－クラマース－スレーターの理論は、間もなくさらに立ち入った実験により、少なくともコンプトン散乱に関する限りは実験的に否定された。ボーテ W. Bothe とガイガー H. Geiger は光量子と反跳電子のコインシデンスを確かめた（1925年4月）。さらにコンプトン効果に対する光量子論的描像は霧箱のなかで実験することによって、きわめて如実なものとなる。X線を送りこむと、たしかに反跳電子の飛跡が見られた（ボーテとウィルソン）。この立体写真から、その反跳の方向とエネルギーを知ることができる。散乱される光量子の方向は——光量子そのものは飛跡をつくらないので——普通は知りえないが、これがうまくもう1回霧箱のなかで原子に衝突して、光電効果（あるいはコンプトン効果）をおこし、電子を飛び出させる場合がまれにはおこる。すると、ここから飛び出る光電子のやや長い飛跡が見られる。このような場合には初めの衝突における光量子の散乱の方向もわかるので、これと前にのべた反跳電子についてのデータとを合わせてしらべてみると、実際二つの粒子の弾性衝突に相当するエネルギーと運動量の保存関係がみたされていることが確証されたのである（コンプトン－サイモン、1925）。[34]

この光の二重性のディレンマはきわめて深刻なものであり、その解決は量子力学の成立の最終段階までもちこされるのである。このディレンマを概念的に解決するためには、まずもって、この二重性が物質粒子に対する同様の二重性を示唆し、二重性の普遍的な性格がとらえられるこ

(33) そのさい、確率波的な性格をもつ仮想場の概念を導入しているわけであるが、この場合の確率がたくさんの原子の集まりに関係して考えられたものである点で、のちの波動力学の確率波とは性格を異にする。

(34) ボーテ－ガイガーやコンプトン－サイモンの実験では、じつは統計はまだあまりよくなかった。この種の実験は今日ではスタンダードなものである。

とが必要であった。かつまた、物質粒子に対して二重性にもとづいた非相対論的量子力学が先に成功したときに、光の合理的な理論を組みたてる道が開かれるという順序をとることになる。そして光の二重性の解釈についてはボーア－クラマース－スレーターよりももっと深刻な考察が必要であり、観測条件の分析にもとづいた方向で解決されることになる（第11章）。

原子による光の散乱でも、光学領域とX線領域とで散乱の様子がちがっており、前者では主として弾性散乱であるのに対し、後者では電子がはじき出され波長がずれる（コンプトン散乱）ことをみた。しかし、もちろん両方の場合がまったく異質的というのでもないことをここで注意しておこう。X線の散乱においても、波長のほとんど変化しない散乱成分もある。これは電子が原子に束縛された一体としてふるまい、光量子がこの原子全体で散乱されるという確率も存在することによる。他方、光学散乱においても波長のずれるスメカル散乱の確率も存在し、それがX線領域におけるコンプトン散乱に対応している。

さて、光学分散の問題にかえろう。クラマースは、原子がはじめに励起状態にある場合にも妥当するように、先のラーデンブルグの理論を拡張した。この場合nなる定常状態にある原子は、光を吸収してから放出することに相当する$\omega_{n+\tau,n}$ ($\tau=1, 2, \cdots\cdots$) なる振動数の仮想振動子のほかに、原子が光を誘導放出（これは“負の吸収”に相当する）してから吸収することに相当する$\omega_{n,n-\tau}$なる振動数の仮想振動子をも考えるべきであるということが本質的である。しかも後者には負の振動子強度があてがわれねばならない。こう考えることによって、彼は合理的な分散公式を得た (1924)[35]。なお各仮想振動子は二つの定常状態にまたがったものであり、電子の軌道運動の振動数は議論のどこにも出てこないと

(35) この仕事はボーア－クラマース－スレーターの理論の出た直後に、その背景で進められた。原子は、少なくともそれの輻射場との相互作用に関しては仮想振動子の束で代行され、それがまわりに仮想場をつくるという見方が有効に働いた。

いう点はラーデンブルグの場合と同様であるが、いまそのことがいっそうはっきりしてきた。

クラマースの分散公式は、次章でのべる行列力学の発見のためのいくつかの鍵を含み、実際これに向かって前進する意味をもつものであった。

まず第一に、クラマース自身やボルンは、このクラマースの分散公式を導く議論をしらべ、それは大きい量子数について対応原理に従って得られた式を、微分を定差で置き換えるという規則を用いて任意の量子数の領域へ移したものを意味していることを示した。

一方、光の散乱の問題は、大きな ω では自由電子による散乱に漸近的につながるはずである。つまりクラマースの分散公式は、$\omega\to\infty$ の極限で古典的なトムソンの式と一致すべきである。このことからクーン W. Kuhn とトーマス W. Thomas は振動子強度に対する「和の規則」をひき出した(1925)。そのさい、クラマースの分散公式における負の項の存在が本質的であって、これによってこの「和の規則」がのちの行列力学の「正準交換関係」にまでつながることになるのである(次章参照)。

光の分散の問題は、他方 $\omega\to 0$ においては2次シュタルク効果につながるはず[36]のものであり、このことからしてハイゼンベルクは2次シュタルク効果のような静的な問題においてもボーア-ゾンマーフェルト理論の描像がやぶれるべきことに気づいた。これは重要なヒントとなる。

さらにクラマースとハイゼンベルクは、クラマースの分散公式を散乱光の波長が入射光のそれとちがうスメカル散乱の場合に拡張することに進んだが、そのさい彼らは、各仮想振動子にあてがった(複素数の)遷移振幅——遷移確率ではなくして——の集まりを用い、その二つを掛けてエネルギー分母を付したものを“中間状態”について加えあわせて、

---

(36) このことからして2次シュタルク効果は、もとの状態から“中間状態”へ遷移する遷移振動数を分母にもつ分散項のあらゆる中間状態にわたる和として計算されるべきことになる(このことは、のちにシュレーディンガーの2次の摂動理論として明確にされることである)。このようなあつかいは、この効果をもとの軌道が外場のためにゆがむとする本来の前期量子論的摂動計算の場合とは異なった描像である。

はじめて合理的な分散公式を得ることができた（1925年1月)。この仕事で実際上すでに電子の軌道の概念は捨てられており、そのかわりに輻射を直接与える遷移振動の集まりを問題にしており、'中間状態' の概念が顔を出している。分散を与える関係は、より簡単な発光の問題の場合とちがって、異なる遷移にあずかる振幅の積を含んだ分散項をたしあわせることになり、行列の掛け算に相当するものがここに登場したのである。クラマース－ハイゼンベルクの分散公式は量子力学的な摂動論による結果を先取りしたものに相当していた。

§5・4　対応原理の精密化

われわれは、前に対応原理の立場で光の放出をあつかい、その遷移確率の式 (4-24) を導くことができた。ただし、この式は高量子数の領域で漸近的に成り立つものであって、低量子数の領域では式自体がすでにあいまいさをおびてくる。それで、低量子数の領域でも精確な遷移確率はいかなるものであり、またいかにして得られるであろうかということが次の問題であるが、これを得るには、対応原理をより鋭利なものにせねばならない。前にのべたように、光の放出の場合について対応原理は、$n \to n-\tau$ なる遷移に電子の軌道運動のフーリエ成分 (4-23) をあてがうものであった。しかしながら、放出される光の振動数は電子運動の高調振動数 $\omega_n(\tau)$ ではなくして、あくまで (4-20) の $\omega_{n,n-\tau}$ である。そのことに対応して放出の遷移確率の精確な式は、(4-24) を記号面で

$$A_{n,n-\tau}=\frac{K}{\hbar}(\omega_{n,n-\tau})^3|X_{n,n-\tau}|^2 \tag{5-8}$$

と書き改めたものによって表わされると考えられる。つまり (4-24) の $\omega_n(\tau)$ を $\omega_{n,n-\tau}$ で置き換えると同時に、$X_n(\tau)$ を――$n \gg \tau$ でこれに漸近的に一致するところの――$X_{n,n-\tau}$ なるもので置き換えること、換言すれば、フーリエ成分 (4-23) を"遷移成分"

$$x_{n,n-\tau}=X_{n,n-\tau}e^{i\omega_{n,n-\tau}t} \tag{5-9}$$

で置き換えること、

$$x_n(\tau) \longrightarrow x_{n,n-\tau} \tag{5-10}$$

である。つまり遷移確率の振幅として $X_n(\tau)$ のような古典的な計算で導かれる量をそのままとることはもはや許されないが、これを正当な遷移確率振幅 $X_{n,n-\tau}$ で置き換えさえすれば、(4-24) と同形の (5-8) でもって直ちに遷移確率がきまると考える。もとの $x_n(\tau)$ は始状態にかかわる量であるが、遷移はもともと始状態と終状態の双方に“対称的に”かかわるはずのものであって、(5-10) は $x_n(\tau)$ をそういう性質をもつ振幅 $x_{n,n-\tau}$ に置き換えることを含意している。実際 $\omega_{n,n-\tau}$ は始状態 n と終状態 $n-\tau$ に“対称的に”——正確には反対称的に——かかわっている。すなわち $\omega_{n-\tau,n}=-\omega_{n,n-\tau}$。このことと (5-9) とから、

$$X_{n-\tau,n}=X^*_{n,n-\tau} \tag{5-11}$$

であることが予想される[37]。こうして (5-10) の置き換えは、“倍音の次数” τ を量子数 n と同質のもの（量子数差）としてとらえなおすことをも含意している。とにかく、こうして一見トリヴィアルな添字のつけかえにすぎないように見える (5-10) は重要な意味をもち、これによってやがては $x_{n,n-\tau}$ が行列要素という意味をもつことも認識されるようになるわけである。（そのとき (5-11) は“エルミート性”とよばれる性質を表わす。）

このような置き換えが合理的なことは、実際前節でのべた光の分散の問題の研究から示唆された。この問題では、ボーア理論に出てくる電子の軌道運動の振動数というようなものはじつは意味がなくて、意味のあるのは遷移の振動数や振動子強度（あるいは遷移確率さらに遷移振幅）のみであり、分散の公式はそれらだけを用いて書き表わされた。ところで、もともとローレンツの古典論では分散と吸収——したがってその逆の発光——は密接な関係にあることからして、分散についての事情は発光にも当てはまるはずである。

(37) 実際、これは前のアインシュタインの関係 $B_{nm}=B_{mn}$ と調和する。

なお (5-8) を用いると、"振動子強度" に対する (5-6) 式は

$$N_m=\frac{2m\omega_{m1}}{\hbar}|X_{1m}|^2 \tag{5-12}$$

と表わされ、対応するラーデンブルグの分散公式 (5-5) は

$$\alpha=\frac{2e^2}{\hbar}\sum_m\frac{\omega_{m1}|X_{1m}|^2}{\omega_{m1}^2-\omega^2}$$

$$=e^2\sum_m\left(\frac{1}{E_m-E_1-\hbar\omega}+\frac{1}{E_m-E_1+\hbar\omega}\right)\cdot|X_{1m}|^2$$

と表わされることを注意しておく。

とにかく、こうして $n\to n-\tau$ なる遷移に $x_{n,n-\tau}$ なる遷移成分をあてがうことになってくるが、問題は $x_{n,n-\tau}$ の集まりを決定するに必要十分なコンシステントな数学的スキームがどのようにして見出されるかということにある。$\{x_{n,n-\tau}\}$ はボーア理論の $x_n(\tau)$ の集まりに対応する量であるが、後者についてはその算出法はわかっている。すなわち系について古典力学の法則と (4-11) のような量子条件とを適用することによって定常状態を表わす軌道運動 $x_n(t)$ を求め、次にそのフーリエ成分をとればよい。そこで、この計算の手続きの総体を $\{x_{n,n-\tau}\}$ に対する計算の手続きに合理的に読みかえることができれば目的が達せられよう。

このような対応原理の精密化の方法の意義について敷衍しておこう。もとのボーアの理論では、定常状態は量子条件で限定された古典運動として定められた。この考えでは、前にのべたように、水素原子などの二、三の特別な場合を別として、一般にはエネルギー準位を正確に与えることができなかった。この方法は、エネルギー準位そのものについても、やはり高量子数のところで漸近的に正しい値を与えるという意味のものだったのである。このことは、このような量子条件で定常状態を定める手続き——これは (4-18) 式の関係につながる——が、前にのべたように、ボーア理論のなかで、遷移振動数を与える振動数条件に対してギャップをもっているということに符合することである。したがって、正確

なエネルギー準位を得るには、量子条件で限定された古典運動という考えも対応原理的につかみ直し、このギャップをうめねばならぬ。このようなつかみ直しは (4-19) 式から (4-20) 式への置き換えと一貫したものであるべきで、したがって倍音振動数というものはいたるところ遷移振動数に置き換えられてしまって、定常状態を導き出す計算過程においても姿を消し、遷移振動数がかわりに現われるはずである。ところが、後者は二つの定常状態に結びついた量であり、軌道運動の振動数という意義はもちえないものである。このような事情は、この置き換えによって遷移振動というものが軌道運動の描像から断ち切られるのと同時に、定常状態自体も電子の軌道運動の描像から断ち切られるべきことを意味するものである。こうして対応原理を徹底し、書きかえを行なうということは、古典的な粒子の描像を含む理論を跳躍台としつつ、このような描像への依存から蟬脱(せんだつ)することをもたらす。ボーアの理論では、定常状態に対しては一つの軌道運動の描像を描き、遷移に対しては描像をもちえないとしたが、じつは定常状態についても軌道運動の描像はもちえないのだということになり、古典的な法則の見方からさらに離脱する。原子内電子の軌道運動という概念が、まさにボーア理論の内部矛盾のもとであり、これを止揚せねばならないのである。

このような進み方に内在する考え方は、遷移成分 (5-9) とエネルギー準位とがわかりさえすれば、発光について実験と比較するうえで必要な知識はすべてもつことになるから、遷移の法則性はとらえられたといってよいとすることであり、かつ、そのためには対応関係をもとにして倍音振動を書きかえるという方針で進めばよいとする立場である。それは古い量子論のなかに対応物をもたないような、まったく新しい要素をもちこむことなしに、新しい理論の形式をつくり上げようとすることを意味する[(38)]と同時に、そのためにはその形式に包含されている中味の論理が古い理論のそれからまったく変改されるべきことを意味する。

---

(38) 前にふれたように、スピンという新しい自由度をもち込むことは古い量子論の重要な前進になったのであるが、それはいま考えない。

なぜなら、倍音振動にかわるべき遷移振動を見出すことによって遷移の法則性をとらえられたものとみなすということは、前にのべた隠れたパラメターの立場の否定であり、遷移の奥になんらかの実在的なものとしての因果的経過を想定しないことを意味する。そして倍音振動が遷移振動に書きかえられることによって、遷移を規定する振動は古典的な描像から断ち切られる。こうして対応原理は保守的な側面と革命的な側面とをあわせもつのである。

このさい注意すべきことは、遷移にはその因果的な機構ではなく、その確率が問題になるといっても、対応原理が教えるように、将来の完全な量子論においてもまず算出されるべきものは、その絶対値の自乗が遷移確率を与えるような量、すなわち遷移確率振幅であろうということである。そしてこの量自体は、再び対応原理が教えるように、因果的な法則に従うはずのものであり、これから絶対値の自乗をつくるところから先でのみ、確率という概念が将来の理論において現われるべきであろう。

この点で、この予想される理論はミクロの現象が純粋に因果的であるとする見地と異なるだけでなく、それが純粋の確率法則に従うものとする見地とも異なっている[39]。こうして量子論は、まず不連続的な飛躍という点において非古典的な遷移という概念を導入したのであったが、いまや対応原理の立場はさらに遷移の法則性について独得な非古典的な考え方を示唆することになり、それがやがては成立する量子力学の“統計的解釈”につながっていくことになる。

とにかく、このように積極的・前進的に理解してゆくならば、対応原理は単に竹に木をつぐような補強工作、強度を算出するための応急処理以上のものであり、将来の完全な量子論の組立てを察知してゆくうえで

---

(39) 遷移確率の概念を導入したアインシュタイン自身は、前にのべたように、その背後になんらか実在的な因果法則があるとする見方をとった。他方において、究極的な物理法則は純粋な偶然性による確率的なものに還元されると予想するような見地も以前からときおり憶測されていたのである(たとえばエクスナー F. Exner)が、いまわれわれの確率法則の考え方はそのいずれとも異なる。

指導的意味をもつことになる。それは、将来の理論の諸要素・諸関係が、これと段階を異にする古い理論のなかにいかに投影されて包含されるかの認識である。それは新しい理論の形式をさぐりあてるのに働くだけでなく、その新しい形式が見出されてゆくにつれて、物理的意味を読みとるための指針ともなるはずである。

量子力学からすれば、そこで $\hbar\to0$ とすると古典論に一致するということは、量子力学と古典論の対応移行関係の最も簡単な表現にちがいないが、過渡期の量子論から量子力学に行きつこうとするさいには、単にこのような認識はあまり役に立たない。われわれは $\hbar$ を有限にとどめ、量子論が古典論に縮退してしまわない現実の世界において、発光の問題などに関して対応をいまのべたような具体的な形でとらえてゆくことによって、量子的世界の論理構造をある程度うかがうことができたのである。

このように対応原理の精密化によって理論自体の書きかえを行ない、原理的に観測可能な量のみを用いて首尾一貫した新しい運動学・力学を創出しようという意識をボルンやハイゼンベルクが次第にもつようになったのである。ボーアの理論を最後として、将来の理論ではもはや原子内電子にはっきりした軌道の描像を与えることは不可能になるであろうという予測を、彼らはヘリウム原子についての失敗や分散の理論の成功の経験を通じていだくようになった。

量子論の困難を克服するには、古典的概念からさらにはなれる必要があるという意識が次第にひろまり、いろんな言葉に「古典的に記述でき

(40) 当時、人々は希望と絶望の間をゆらいでいたと思われる。ボルンは 1924 年のその分散の理論の論文をすでに“量子力学”と題しているかと思うと、同じ年に書いた書物『原子力学Ｉ』(Atommechanik Ｉ) では、究極妥当の量子論はなおだいぶ先のことと予想している。他方パウリは当時、一般に運動と力というような古典的概念の変革が必要であると書いた。ボーアはボーア-クラマース-スレーターの理論が実験的に否定されたからといって、すぐには光量子概念を受け入れようとせず、原子現象についてミクロな時空記述の可能性まで疑ってみるべきだとのべた。

ないような」という合言葉が（ときとしてはあまりに安易に）かぶせられるようになった。[40] 古典的モデルが結局捨てられるべきだという意識は、そのころスピンの問題においても表面化したことは前にのべた。

とにかくドラスチックなゆき方で新しい理論を創出するような学問的エトスはゲッチンゲンやコペンハーゲンで醸成されていたわけであるが、上にのべたような対応原理の精密化の線にそって新しい量子論を具体化するにはボーアとはまた少しちがったタイプの新しい天才を必要とした。これについては次章でのべる。

第6章　行列力学の形成

§6·1　ハイゼンベルクの新理論

前述の対応原理の精密化の課題は、まだ一般的に解決されているわけではない。それでも人々は実験データに助けられ、また勘と技巧でもって個々の問題を対応原理的に処理し、いろんな場合について、あとからみて本質的に正しい関係式を結論するという情況に達した。すでにあげたランデの g-公式、クローニッヒとヘンルの強度則、クラマース－ハイゼンベルクの分散公式、トーマス－クーンの和則などがその例である。これらの結果が続出したことはもとのボーア－ゾンマーフェルト理論からみれば大きな前進であり、1924—25年ころにおける前期量子論の成熟ぶりを示している。しかしながら、人々のこのような芸当が一貫した体系的な方式としてとらえられない限りは単に一般性をもたないのみでなく、新しい理論をみずからの足で立たしめることができず、したがってその全貌、その本質を明らかにする道がひらかれない。

一方、このように対応原理をうまく使いこなすことにより、しばしば妥当な結果がひき出せるということは、その背後に未知の正しい一貫した理論構造がかくされているにちがいないという信念を強めさせるものである。ハイゼンベルクは、まさにこの理論構造を直接的にとらえ、"1個の" 量子力学をつくり上げることにいどんだ。

彼はクラマース－ハイゼンベルクの分散公式を導いた経験をふまえて、原子からの光の放出の遷移振幅に関し対応原理を精密化するという前述の課題を追求し、それを通じて前期量子論を換骨奪胎し、内部矛盾を含まぬスキームを創出し、ついにはじめて量子力学の世界への敷居をまたぐのに成功した。(1) それが「運動学的および力学的諸関係の量子論的転釈

について」という特異な表題をもつ彼の革命的な論文であって、1925年7月のことである。[2]

さて、前期量子論は定常状態、遷移、遷移確率、さらに光量子などの非古典的道具をお膳立てしたにかかわらず、定常状態とこれをきめる量子条件を古典運動学と古典力学によって考えている限りにおいて、それはいぜん古典論的本質をもったものである。この点をラディカルに否定しない限り、真に新しいコンシステントな理論に到達することはできない。ハイゼンベルクは定常状態と遷移という概念自体は残すが、定常状態で電子が軌道運動をしているという考えを捨てる。定常状態は量子数で示されるきまったエネルギー（あるいはさらに角運動量の大きさとその1成分）はもっているが、その背後に軌道運動を表わす $x(t)$、$p(t)$ のような量がそのままの形で付随している要はない。これらは直接観測される量ではなくて、ただ古い量子条件などで方便として使われていたにすぎないとみるべきである。観測と関係のあるのは古典的な $x(t)$、$p(t)$ ではなくて、古典的な“位置座標”や“運動量”などに対応する諸力学量の遷移成分（(5-9) など）であり、これらは遷移振動数をもって振動している。これに対し電子の軌道運動の振動数などというものは非

(1)　彼は当時23歳で、ゲッチンゲン大学の私講師だった。それまでにゾンマーフェルト、ボルンおよびボーアのもとでさまざまの仕事を手がけていたことはすでにふれた。彼は機敏であると同時に考えが深く、また競争心が強かった。

(2)　この機会に次のことを注意しておく。一般に仕事には、それが着手されてから仕上がるまでに、さらにそれが書かれ、投稿され、出版されるまでに、さまざまの時間的な幅がある。そして仕事は、ある場合にはその進行中からすでに手紙の交換や討論、うわさなどで部分的に伝わり、あるいはまたプレプリントないし校正刷りの段階で配布されて、問題になりはじめる。他の場合には、論文が実際に出版されたうえで注目をひき、またある場合は出版されたのちも何かのきっかけがあるまで当分埋もれてすぎる。これらさまざまの運命は、著者のクレディットにも微妙に影響する。本書では、仕事のなされた時点として、論文が投稿されて雑誌に届いた (receive された) 日付をもって示すことにしたが、上記のような意味のさまざまの時間幅があることは留意する必要がある。一般的にいって当時は、論文が届いてから出版されるまでの時間は今日よりむしろ短かった。

物理的なものであって、追放すべきものである。

このような立場と関連して、ハイゼンベルクのゆき方の第二のポイントは、従来のように問題をまず古典論の段階で解き、量子条件でセレクトして得た解を、対応原理に従って量子論の言葉に読みかえるというやり方ではなく、まず問題の最初の定式化自体を対応論的に量子論的な定式化で置き換えてしまうということである。そのうえでこれを解くという部分は数学的に新しいものになるけれども、要するに数学的な手続きにすぎない。つまり対応原理をその新しい理論の定式化自体のなかにビルトインしてしまうことによって、ボーア式の対応論的議論の仕方を止揚するのである。

このような新しい問題のたて方をとったことにより、古典論的な法則の見方からの離脱とコンシステントな理論の発見とが可能になった。新しい立場では、遷移成分（5-9）の総体——それは二重に無限個の複素数の集まりである——は、いわば原子内電子のすべての可能な運動の記述の“代理”であって、必要なことは、この $\{x_{n,n-\tau}\}$ に対する新しい計算規則と基礎方程式——すなわち運動学と力学——自体を見出すということだけである。そのためには、まず古い量子論における個々の定常状態の軌道運動 $x_n(t)$ を（4-16）によってフーリエ成分 $x_n(\tau)$ にばらしたうえで、その集まりの総体 $\{x_n(\tau)\}$（あらゆる n, τ にわたる）を遷移成分（5-9）の総体 $\{x_{n,n-\tau}\}$ で置き換え、前者に対する計算規則の対応論的置き換えによって後者についての計算規則を見出す。そのうえで、この新しい計算規則に従って古典力学の運動方程式と量子条件を遷移成分の総体に対するものに書きかえればよい。

それは、具体的には次のようになる。まず倍音振動に対する計算規則の遷移振動に対する計算規則への置き換えは、振動数に関してはすでにわかっていることに着目する。すなわち、それは（4-19）を（4-20）で置き換えることである。したがって、これに適合するように振幅の計算規則をも書きかえうれば新しい運動学がわかるはずである。ところで、（4-19）を（4-20）で置き換えるということの意味するところは、第一に倍音振動数における倍音関係（4-22）を遷移振動数に対するリッツの

規則 (4–21) で置き換えること：

$$(4\text{–}22)\longleftrightarrow(4\text{–}21) \tag{6–1}$$

である。これが第一の鍵である。

さらに振動数とエネルギーとの関係の面に注目すると、(4–19) 式を (4–20) 式で置き換えるということは微分が差分で置き換えられることであり、これをエネルギー以外の量 F_n にまで一般化して、

$$\tau\frac{dF_n}{dn}\longleftrightarrow F_n-F_{n-\tau} \tag{6–2}$$

なる置き換えを示すものと考えられる。さらにこれをおし進めて[3]、

$$\tau\frac{\partial G_n(\tau)}{\partial n}\longleftrightarrow G_{n+\tau,n}-G_{n,n-\tau} \tag{6–3}$$

なる置き換えの規則が得られる。(6–1)、(6–2)、(6–3) が対応原理の精密化のための鍵を与える。(6–2) はすでに分散の問題でボルンやクラマース－ハイゼンベルクが用いていた。

古い量子論では、電子の位置とか運動量などの力学的諸量（これを一般的に u、v などで表わそう）は、すべて各定常状態ごとに、倍音振動 $u_n(\tau)$ の集まりとして構成されていた。新しい理論ではそのおのおのには遷移振動 $u_{n,n-\tau}$（これを $u(n,n-\tau)$ とも書くことにしよう）が対応する。ところで古い理論では二つの量 u、v の振動成分から $\overline{uv}$ なる積の振動成分は、

$$\overline{uv}_n(\tau)=(\sum_{\tau'}U_n(\tau')e^{i\omega_n(\tau')t})\times(\sum_{\tau''}V_n(\tau'')e^{i\omega_n(\tau'')t})$$ の $e^{i\omega_n(\tau)t}$ を含む項

$$=\sum_{\tau'+\tau''=\tau}u_n(\tau')v_n(\tau'')=\sum_{\tau'}u_n(\tau')v_n(\tau-\tau') \tag{6–4}$$

---

(3) F_n は定常状態ごとに値をもつ n の任意の関数であり、$G_{n,n-\tau}$ は $n\to n-\tau$ なる遷移に付随し、古い量子論の $G_n(\tau)$ に対応するものである。

として導かれる。これを書きかえることによって、新しい理論における $\overline{uv}$ $(n, n-\tau)$ が u, v の遷移成分から導かれる関係を知ることが問題である。$\overline{uv}$ も一つの力学量であるので、古い理論でその倍音成分 $\overline{uv}_n(\tau)$ は $u_n(\tau)$、$v_n(\tau)$自身と同じ振動数 $\omega_n(\tau)$ をもつわけであるが、このことは (6-4) 式に見られるように指数関数の肩で (4-22) がはたらくことにより保証されたのである。新しい理論でも $\overline{uv}$ の遷移成分 $\overline{uv}(n, n-\tau)$ は $u(n, n-\tau)$、$v(n, n-\tau)$ 自身と同様 $\omega(n, n-\tau)$ で振動すべきであるが、こんどは (4-21) 式がはたらくことによってこのことが保証されねばならない。そのためには (6-4) 式に対応して、

$$\overline{uv}(n, n-\tau)=\sum_{\tau'}u(n, n-\tau')v(n-\tau', n-\tau) \tag{6-5}$$

であるべきである。

こうして新しい計算規則（の核心である積に対するもの）が得られたが、倍音成分に対する計算規則との著しい差異は、$\overline{uv}(n, n-\tau)$ には v の同じ n に属する成分のみならず、あらゆるちがった n に属する成分が混入してくることである。元来、一般に $n\to n-\tau$ なる遷移に対応する成分というものは一つの定常状態 n（または $n-\tau$）における電子の運動のみに関連したものと考えるべきものではないので、このことは驚くにあたらない。古い量子論では、$u_n(\tau)$ において τ を走らせたものの和が n 番目の定常状態における位置とか運動量とかを意味しており、軌道運動の描像が成立していたのだが、書きかえられたものにおいては、$u(n, n-\tau)$ において τ を走らせた和というようなものがこのような意味をもつことはできなくなる。[4]

こうして、普通の意味で位置とか運動量を表わす数はなくなる。ただし $u(n, n-\tau)$ の n と τ を走らせた全体としての集まりは、古い量子論

---

(4) 古い理論で倍音振動 $u_n(\tau)$ の各 n ごとの集まりがフーリエ級数として一つの軌道運動に統一されていたということは、そのことがこの集まりの計算規則を与えるということに意味があるのであり、これがわれわれの遷移振動の集まりに対する計算規則に対応論的に書きかえられ、そのさい成分の和というものに対する意味づけのほうは捨てられるわけである。

における $u_n(\tau)$ の集まりに対応するという意味で、古い理論で u が表わしていた力学量を新しい理論においてとにかく代表するものと考えられる。(6-5) は

$$(uv)_{nn'}=\sum_m u_{nm}v_{mn'} \tag{6-5'}$$

と書いてもよい。これの意味するところは、二つの量 u、v の積 (uv) の $n\to n'$ なる遷移成分は、u の $n\to m$ なる遷移成分と v の $m\to n'$ なる遷移成分との積をすべての m にわたってたし上げたものであるということである。このことは、$n\to n'$ なる遷移が任意の中間状態 m をへておきうるものとみなされることを示唆している。この規則で驚くべき点は、$(uv)_{nn'}$ と $(vu)_{nn'}$ とが一般に等しくないことにある。

$$(uv)_{nn'}\neq(vu)_{nn'} \tag{6-6}$$

新しい計算規則は得られたが、これだけではもちろんまだ系の各力学量の遷移成分を算出することはできない。古い量子論では倍音成分に対する計算規則自体は自明のものにすぎなかったのだが、倍音成分を——すなわち運動を——定めるものとして運動方程式（ただしこれは定常状態にのみ用いられるとした）と量子条件が存在した。したがって新しい理論では、これをいまの置き換えの規則と計算規則に従って書き直したものとしての新しい力学——運動方程式と量子条件——が存在し、これによって全体として閉じた数学的スキームができ、遷移成分の総体がきめられることになるはずである。そこでハイゼンベルクは新しい計算規則によって古い理論における運動方程式と量子条件を書き直すことに進んだわけであるが、「驚いたことに、それは完全に成功した。数学が突然物理学者よりも賢明であることが明らかになった」。

古い量子条件 (4-11) は倍音成分で書くと

$$m\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}|X_n(\tau)|^2\tau^2\omega_n=n\hbar$$

であるが、これを n で微分したものに、前の (6-3) で示された書きかえの鍵を適用すると、これは

$$2m\sum_{\tau=1}^{\infty}\{\omega(n+\tau,n)|X(n+\tau,n)|^2 \\ -\omega(n,n-\tau)|X(n,n-\tau)|^2\}=\hbar \qquad (6\text{-}7)$$

となる。これはクーン－トーマスが見出していた“和則”にほかならない！　上で古い量子条件をnで微分したことが重要であり、これによって正確な量子条件への道がひらかれたのである。

次に運動方程式を書きかえるということは、遷移成分をその力学系に対するニュートンの運動方程式に直接ぶち込み、そこで新しい計算規則を適用するということである。すると、古い量子論で古典的な運動方程式が個々の定常状態においてのみ成立していると考えたことは書きかえられた運動方程式では意味を失うけれども、かえってこの新しい運動方程式は純粋な古典論の場合と同様の一般的な妥当性をもったものと考えうることになる。

以上によって、実際にそれぞれの力学モデルについて遷移振幅とエネルギー準位を同時にコンシステントに算出するに必要十分な数学的スキームが得られたものと期待される。そして位置座標（つまり双極子モーメント）の遷移成分 x_{nm}——すなわち X_{nm} と ω_{nm}——によって、それから射出される光の振動数や強度もすっかり得られることになる。

とにかくハイゼンベルクの新理論では物理量の概念がかわり，それぞれの物理量は二つの定常状態にまたがる成分の総体に対応するものとなる。すなわち、それは各定常状態に関する成分 u_{nn}（“対角要素”）のみならず、それぞれの定常状態をそれぞれの他の定常状態に移す成分 u_{nm} $(n\neq m)$（“非対角要素”）をもあわせた総体からなり、この総体をいっきょに問題にせねばならない。つまり個々の定常状態を別々にあつかうことは一般にできず、全部がからまった形になる。したがって、実際に解を見出すことは数学的に複雑なものになる。

ハイゼンベルクの本来の目標は、水素原子の問題をこの方法で解き、バルマー線の強度について精確な式を導き出すことにあったが、水素原子は周期的運動と非周期的運動（つまり離散スペクトルと連続スペクトル）の両方を含むため数学的に複雑で、この新しい理論で容易に解けそ

うにない。それに、じつはいまのところ、理論はまだ1自由度の場合について定式化されているにすぎない。その場合でも、問題は数学的には無限個の未知数をもつ非線型の連立方程式を解くことを意味するので複雑である。そこでハイゼンベルクは水素原子の代用として非調和振動子と回転子とをとり上げ、これをこの方法で解いた。そして得られた x_{nm}、$\dot{x}_{nm}$ を突っ込んで系のハミルトニアンの成分を勘定し、それがちょうど

$$H_{nm}=E_n\delta_{nm} \tag{6-8}$$

の形になることを見出した。これはエネルギーが定常状態にあてがわれる量であり、かつ時間によらない（保存量である）ことを意味している。これがきめ手となり、このことによって、彼は自分の新理論がコンシステントなものであることを確信することができたのである。とくに調和振動子の場合については、(6-8) の E_n は

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

となり、0点振動を含んだプランクの式が回収された。

このように、彼は具体的には簡単な場合について理論をたてたわけであるが、それは概念的には一般的な性格のものであり、原子内の運動を少なくとも形式的に一貫したやり方で精密に解く方式を与えるものと期待される。しかしハイゼンベルクが簡単な1自由度の場合をあつかい、力学についてニュートン形式にそってやっている点は、1913年のボーアの仕事と共通している。最初の開拓的な仕事は多くこういうスタイルになるが、次の発展でこれらの点は一般化されることになろう。

ハイゼンベルクの方法について、二、三の点を注意しておこう。この新しい理論では軌道運動の振動数というものが追放され、さらに原子内電子の位置や運動量というものも普通の1個の数としての対応物をもたないことになり、軌動運動の描像は犠牲に供せられたが、このような状況に対してハイゼンベルクはこう考えた。——原子内電子の位置や運動量というようなものは観測にかからないものであるから、これが普通の1個の数としての対応物をもたないことは困難を意味しない。観測に

かかる光の振動数や強度に対しては、理論は $x(n, n-\tau)$ によって答えている。電子の位置や運動量に一つの数値を与ええないということは、従来の軌動運動の描像の失効を意味するが、そのこと自体は理論にとって本質的な困難ではない。むしろ原子内電子の位置とか運動量の値というような、原理的に観測できないと考えられる量が理論から追放されるのは理論の進歩であると。

これは、しかし原理的に観測しえない量がことごとく理論から追放さるべきだということではなくて、理論が行きづまった場合、原理的に観測しえないにかかわらず、理論の本質的な構成部分として介在し、行きづまりの因となっているような概念が、まず批判の対象となるべきだという意識に意味がある。軌道運動はアインシュタインの特殊相対論のさいのエーテルのように非物理的なものであり、それがまさにボーア理論の内部矛盾のもとになっているから槍玉にあがり、棄てられねばならないのである。実際ハイゼンベルクは、このような考え方をしたから、彼の“実証論的な方法”はドグマとはならず、発見法的なものとして役立ちえたのである。そして、出来上がった彼の理論において基礎法則から観測事実が媒介されてくる筋道というものは、古い理論の場合よりもむしろこみいったものになる。さらに、新しい理論はのちに見るように、その発展とともに軌道運動にかわって波動関数（状態ベクトル）という直接観測できないような量を理論の構成における本質的な要素として新たに導入することになるのである。

また電子に対してその位置や運動量の値を否定するということなども、ミクロの領域においては古典的な粒子の概念の否定が要求されていること、より一般には、日常的なマクロの現象において有効な直観的な描像がミクロの世界に当てはまるとは限らないこと、の自覚として意味がある（第11章参照）。彼は粒子の古典的な描像を否定したが、それにかわるなんらかの別の直観的な描像を与えはしなかった。このことは、電子がせいぜい、いろいろの観測事実の束ないし、それに対応して、数学的な記号の束としての統一性しかもたなくなることのようにみえる。しかし、やがて理論の展開とともに電子に対してまったく新しい（広い意味で

の）描像をもつことも不可能でなくなり、理論は、新しいものとして電子をとらえさせるようになることをのちにみるだろう。そして、原子内電子の位置と運動量も、それぞれ一方だけなら原理的に観測できることが認識されることになる。

しかし、いずれにせよハイゼンベルクが原子内電子の軌道運動を否定したことは方法的にきわめて重要であった。それだけでは、たとえば電子が霧箱のなかを走って飛跡を呈するのをどう理解すべきかわからないではないかというような疑問がもちろんいっぱい沸いてくる。しかし問題を分割し、原子内の電子のエネルギー準位や発光の遷移確率の問題に焦点をあわせ、そこであえて電子の軌道運動の否定にふみ切ることによって、この問題を解決するのである。

ハイゼンベルクの理論はまた次の点でも問題のあつかいを分割している。この理論は原子からの光の放出に関しては、なおボーアが対応原理によって得た（4–24）を単に書きなおした（5–8）をそのままひきついでいるが、このことは、ハイゼンベルクが原子による光の放出・吸収の問題を媒介にして原子の運動学・力学についての量子力学を発見したということを意味する。つまり原子の力学の問題を原子内電子と輻射場との相互作用という、より高度な電磁気学的問題からたくみにアイソレートすることによって、前者に関して量子力学を発見することに成功したということである。彼は問題を、このように純粋に量子力学的にあつかう部分と、なお対応論的にあつかう部分とに分割したわけであり、このことは、プランクがその熱輻射論において、問題を古典論であつかう第一の部分と、量子を導入する第二の部分とに分割した（§3·1参照）のに類似している。いかに革命的な仕事でも、いっきょに全部を変革するということは滅多にないことで、問題を分割して、その半分を解決するというほうが普通である。（5–8）自身を量子力学の立場で演繹することは重要な問題として残される。[5] ハイゼンベルクの新理論はまた光の二重性のディレンマにふれるものでもない。[6]

ハイゼンベルクの理論は、対応原理が予想したようにボーアの理論に新しい素材をもちこむことなしに、本質的にはボーア理論の論理的展開

によって、すなわちこの理論に内在していた論理的なギャップを克服する努力によって達成された。ボーア－ゾンマーフェルトの理論が成立してからわずか10年にしてこれに成功したということは、このような事情にも関連している。(7)

実際、クラマースの分散の理論をふまえボーアの対応原理の線にそってハイゼンベルクがその新理論に到達した道行きは、歴史的にかなり必然的なもののようにみえる。しかしながら、強調すべきことは、新しい理論の発見にあたって従来の考え方から何かを棄てねばならぬということ、そしてそのためには概念批判が必要だということである。（先にボーア－クラマース－スレーターは棄てるべきものとしてエネルギー保存則をとって失敗した。）ハイゼンベルクの理論は原子内電子の軌道運動を否定し、また物理量の可換性を棄てるという果敢な冒険であり、このような「虚空への飛躍」によって新しい世界へとびこむという性格をもっている。出来上がった量子力学の立場からふりかえってみるならば、ハイゼンベルクの道筋はかえって非常にきわどいルートを通って成功したという印象のほうが強い。(8) つまり“狭き門より入れよ！”をはたした

---

(5) (5-8) 式は元来対応原理的に得られ、のちにディラックによって量子力学的に導かれることになるものであるが（第9・13章参照)、原子の発光の場合には光の波長が原子の大きさに比べて十分長いので双極輻射のみでよい近似になるということが、そこできいている点も注意すべきである。たとえば原子核の電磁プロセスのような場合には必ずしもこの近似ですまない。

(6) このハイゼンベルクの仕事とちょうど同じころ、前述のボーテ-ガイガーの実験が出、このディレンマは高まっていた。そしてハイゼンベルクは2年後には、光の二重性にもとづく思考実験によって不確定性原理をたてることになる（第11章)。

(7) ただし、おおかたのべることを省略したのだが、このような進歩は前に注意したように分光学を大宗とする豊富な実験事実によって拍車をかけられたことも忘れてはならぬ。

(8) たとえばハイゼンベルク理論によって算出される $x_{n,n-\tau}$ が、高量子数の領域でボーア理論による軌道運動のフーリエ成分 $x_n(\tau)$ に漸近することは、あとから（波動力学との関係がついてのちに）証明できるが、それは簡単ではないのである。

のである。それは、かなり高級な問題の分析から量子を最初に発見したプランクの場合に類比できる。

ハイゼンベルクの仕事と1913年のボーアの仕事また1900年のプランクの仕事との類似の面にふれたが、1905年のアインシュタインとの類似としては、特殊相対論とのそれはすでにふれたところであるが、さらに一般的に次の点があげられる。ハイゼンベルクは当時理論分光学のエキスパートであり、バルマー線の強度の問題の追求がきっかけとなったのではあったが、結局、彼が単に個別的な問題の処理というゆき方でなく、原理的な問題を考え、概念の変革を行なって新理論をたてたという点である。(これは半年後のシュレーディンガーの場合も同様である。)他方またこのハイゼンベルクの論文の特異な表題とラディカルな性格はアインシュタインの光量子の論文を想起させる。しかも彼はこの論文を、次のいささか低姿勢の文章で結んでいるのである。「ここでのべた方法が原理的には満足なものなのか、それとも結局1個の量子力学をつくるという課題へのアプローチとしてはあまりにも粗っぽいものであるのかは、ここでは非常に皮相的に用いた方法をもっと数学的に深めることによってのみ答えられるであろう」と。実際、この数学的に深めるという仕事は、すぐに他の人々によってとり上げられることになる。

§6•2　ゲッチンゲンの「行列力学」

量子力学の形成史において最もオリジナルな仕事として、プランクの量子、アインシュタインの光量子、ボーアの水素原子の量子論、ドブロイの物質波、そしてこのハイゼンベルクの理論の五つがあげられよう。このうちプランク、アインシュタイン、ドブロイの場合、それぞれの根本的なアイディアがさらに展開されはじめるには数年のおくれがあった。ボーア理論の場合でさえ、その本質的な展開はかなりおくれてはじまっている。こういうことは一般に珍しいことではないのである。しかし、ハイゼンベルクの新理論の場合は、これに対する反応は早かった。それはまずボルンとヨルダンであり、ついでディラックであり、パウリであった。

ハイゼンベルクは、自分の理論こそさがし求められていた「量子力学」であると信じたが、その論文原稿が書かれた時点では、彼の理論が本当に自然を正しくつかんだものだという明白な積極的な証拠には乏しかった。しかもハイゼンベルク自身は、その新理論を出したあと、そこで行きづまった。彼の新しい計算規則の特徴は (6-6)、すなわち「非可換性」であるが、このこと自体奇怪なことがらであり、彼は最初の人間としてそれに危惧をもたざるをえなかったのである。これに対しボルンまたディラックは、この奇妙な非可換性こそ、かえってまさにこの新理論の核心であるとみることによって、理論を形式面で整理し発展させることになる。

ハイゼンベルクは書き上げた原稿をボルンに託してライデンとケンブリッジへの旅に出た。ボルン（当時42歳）はあたかも後述するようにエルザッサーW. Elsasser の仕事との関連でドブロイの物質波について考えはじめていたときであったが、ハイゼンベルクの原稿を読んで、それが「量子力学」への突破口をひらくものでありそうだということを感じとった。数学的により円熟していた彼は夏休みを返上してこの理論の数学的構造をしらべることに熱中した。

彼は、ハイゼンベルクのいう遷移成分の総体なるものを行列形に配置すると、新しい計算規則なるものは数学でいうマトリックス（matrix）（これは‘子宮’を意味するが「行列」と訳される）のそれにほかならないことにまず気づいた。実際、行列の計算の特徴は、積が順序によって一般に異なること、すなわち非可換性である。それで結局、新理論では古典的な各力学量に対して、それぞれの遷移成分を行列要素とする行列

---

(9) 行列は、それまで物理にあまり使われていなかったとはいえ、数学的になんら新奇なものではない。（もっとも、いまいう行列は無限次元のそれであるのでいささか厄介なものである。）若いハイゼンベルクが行列を知らずに行列力学を発見したことは面白い。新しい理論を発見するのに、必ずしもあらかじめそれにふさわしい数学を知っていなくともよい例である。物理的に本質的なことは、力学量を遷移成分の総体であらわすという新しい対応とその計算規則の発見自体にある。

が対応することになり、力学量は行列で代表されるといってよいことになる[9]。したがって、たとえばハイゼンベルクの$\{x_{nm}\}$は行列$\underline{x}$で表わされる（以下で下に線を引いたものは行列を表わす)。量子数nには行列における行と列の‘番号’となる。もっともそれは単なる順序数ではなくて、元来$n=\oint pdq/h$であったことに対応する量的意味も含む。

もう一つの点は、ハイゼンベルクの仕事は力学の正準形式によらずになされているが、xとpを用いる古典力学の正準形式との対応を保って進むほうが、理論の構造（量子化の手続きを含む）を明確にするのに有用と考えられることである。こういう立場でボルンは若いヨルダンと協同して、ハイゼンベルクの新理論を行列の言葉に翻訳することを行なった（1925年9月)。

まずハイゼンベルクが古い量子条件の書きかえから得た「和則」(6-7)は

$$(\underline{p}\,\underline{x})_{nn}-(\underline{x}\,\underline{p})_{nn}=-i\hbar \qquad (6\text{-}9)$$

と書けることがわかる。これが最初のとっかかりとなる。この左辺は$\underline{p}\,\underline{x}-\underline{x}\,\underline{p}$なる行列の対角線上にくる要素であるが、彼らはさらに進んで、この行列の非対角要素について

$$(\underline{p}\,\underline{x})_{nn'}-(\underline{x}\,\underline{p})_{nn'}=0 \qquad (n\neq n') \qquad (6\text{-}10)$$

なることを結論することができた。これがハイゼンベルクより実質的に進歩した点である。(6-9) と (6-10) は、合して行列の間のコンパクトな関係式

$$\underline{p}\,\underline{x}-\underline{x}\,\underline{p}=-i\hbar\underline{1} \qquad (6\text{-}11)$$

で表わされる。$\underline{x}$や$\underline{p}$は、その行列要素が (5-9) のように時間的に振動するもので、もちろん時間tによる行列である。また$\underline{1}$は

$$\underline{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

なる無限次元の行列である。$\underline{p}$、$\underline{x}$ は行列であるので一般に交換しないはずだが、この同時刻でとった「交換子」$\underline{p}\,\underline{x}-\underline{x}\,\underline{p}$ が (6-11) のように簡単なものになるというのである。この美しい関係が、古い量子論の量子条件にとってかわるわけである。そして (6-11) には、もはや量子数 n は陽にはあらわれず、したがってそれは定常状態に言及しなくてもよいような、また周期系に妥当するものという古い量子条件の特殊性からも解放されたとみうる形をしているのである。(6-11) には、またハイゼンベルクの (6-7) においては隠されていた虚数の $i=\sqrt{-1}$ が顔を出していることも重要である[(10)]。

なお (6-11) は $\underline{p}$ と $\underline{x}$ がともに無限次元の行列でない限りみたされないことは容易にわかる。実際 (6-11) をみたす行列の例として最初に見出されたものは、ボルン－ヨルダンの得た（いま時間によらない行列で書くこととして）

$$\underline{X}=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\cdot\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\cdots\cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0\cdots\cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3}\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}=i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\cdot\lambda\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\cdots\cdots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0\cdots\cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3}\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix} \tag{6-12}$$

である[(11)]（これは線型振動子のハミルトニアン $\underline{H}=\dfrac{\underline{p}^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2}{2}\underline{x}^2$ を対角型にするものになっている。ただし $\lambda=\sqrt{m\omega}$）。

---

(10) それは、$\underline{x}$、$\underline{p}$ がエルミート行列であること（すなわち $x_{nm}=x^*_{mn}$、$p_{nm}=p^*_{mn}$ (5-11) 参照）、そのとき交換子は反エルミートなことによる。

(11) (6-11) に対する別の実現として、次に見出されるのがシュレーディンガーの $\underline{p}=\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}$ である。

次に運動方程式としては、古典論の正準運動方程式をそのまま行列の間の関係と見直した

$$\dot{\underline{x}}=\frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{p}},\quad \dot{\underline{p}}=-\frac{\partial \underline{H}}{\partial \underline{x}} \tag{6-13}$$

をとる（$\underline{H}$は系のハミルトニアン)。ところが (6-11) を用いると、一般に $\underline{x}$ と $\underline{p}$ との"関数"行列 $\underline{A}(\underline{x}, \underline{p})$ について

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial \underline{x}}=\frac{i}{\hbar}[\underline{p},\ \underline{A}] \tag{6-14 a}$$

$$\frac{\partial \underline{A}}{\partial \underline{p}}=-\frac{i}{\hbar}[\underline{x},\ \underline{A}] \tag{6-14 b}$$

が成り立つことを示しうる（ただし$\underline{x}$、$\underline{p}$の積が出てくるとき、その順序を適当にとるとせねばならぬ)。ここに交換子に対し $[A,\ B]\equiv AB-BA$ なる記号を用いた。それゆえ運動方程式 (6-13) は

$$\dot{\underline{x}}=\frac{i}{\hbar}[\underline{H},\ \underline{x}],\ \dot{\underline{p}}=\frac{i}{\hbar}[\underline{H},\ \underline{p}] \tag{6-15}$$

とも表わせることになる。この形を用いることにより、運動方程式が交換関係 (6-11) とコンシステントなことがすぐわかる。(じつは、元来ボルンーヨルダンは、この要求から (6-10) の関係を推論したわけであった。) また (6-15) からして、任意の（時間 t を陽に含まぬ）力学量 $\underline{A}(\underline{x},\ \underline{p})$ について

$$\dot{\underline{A}}=\frac{i}{\hbar}[\underline{H},\ \underline{A}] \tag{6-16}$$

が成り立つことになる。つまり (6-11) の結果として、運動方程式がすべての力学量に対して共通の1階の形 (6-16) に書けることになったのである。[12] とくに (6-16) は$\underline{H}$については（$\underline{H}$が t を陽に含まぬ限り)、

---

(12) このことのゆえに、理論の別の表現（"シュレーディンガーの描像"）において、運動方程式が $i\hbar\dot{\psi}=H\psi$ の形に移されることが可能になる（第8章)。なお (6-16) は、(6-14 a）とある種のアナロジーをもつ（t が c-数であることを別として）ことに注意。

$$\dot{\underline{H}}=0 \tag{6-17}$$

を与える。これはエネルギー保存則を意味し、$\underline{H}$が対角行列であること、すなわち (6-8) が出てくる。もともと $\underline{x}$ や $\underline{p}$ の行列要素が

$$x_{nm}=X_{nm}e^{i\omega_{nm}t}, \qquad p_{nm}=P_{nm}e^{i\omega_{nm}t} \tag{6-18}$$

のように振動型であったこと、すなわち行列要素が

$$\dot{x}_{nm}=i\omega_{nm}x_{nm}, \qquad \dot{p}_{nm}=i\omega_{nm}p_{nm} \tag{6-18'}$$

をみたすことを考慮すると、(6-15) と (6-8) とから、「振動数条件」

$$\hbar\omega_{nm}=E_n-E_m \tag{6-19}$$

を得る。すなわち遷移成分はたしかに遷移振動数で振動している[(13)]。そして (6-16) は、$\underline{A}$ の行列要素もまた (6-18) と同様に

$$A_{nm}=A_{nm}(0)e^{i\omega_{nm}t} \tag{6-21}$$

で振動していることを意味する。

こうしてボルン－ヨルダンは (つづくディラックもまた) エレガントな定式化を得た。それは、量子力学においても正準形式が適切なものであることを示している。そのことのもっと深い意味は、ディラックの仕事 (§6·3参照) 以後いっそう明らかになっていくわけである。このことがわかるのは少しあとになる。ボルン－ヨルダン理論は、しかし、

---

(13) あるいは逆に (6-18′)、(6-19) から (6-15) を得ることもできる。すなわちまず (6-18′) は (6-19) を用いて

$$\dot{x}_{nm}=i\frac{E_n-E_m}{\hbar}x_{nm} \tag{6-20}$$

等となる。そこで (6-8) の関係 $H_{nm}=E_n\delta_{nm}$ によって対角行列 $\underline{H}$ を定義すると、(6-20) は

$$\dot{x}_{nm}=\frac{i}{\hbar}[\underline{H},\ \underline{x}]_{nm}$$

と書ける。

その物理的内容からすればハイゼンベルク理論につけ加えるところの少ないことも事実である。また、これによって新理論の数学的骨組がとらえられ、以後の見通しがよくなったわけであるが、まだ十分なものとはいえない。数学的にみて行列による微分などの定義が不適切だったことのほか、無限次元の行列のあつかいの数学的分析があまり進んでおらず、また理論はいぜん1自由度の場合に限られている。これらの欠陥は次の論文で大いにうめられることになる。

それはボルン－ヨルダンにハイゼンベルクが加わって仕上げた合作の大論文であって、これによって「行列力学」が文字どおり成立した（1925年11月）[(14)]。ハイゼンベルクの最初の論文が出た以上、それからこの論文に至るまでの発展は一筋道であったともいえるが、それにしてもそのスピードは驚異的である。

まず、これまでの結果をもう一度まとめて言ってみると、次のようになる。

（I） 各力学量は、その nn' 要素が時間とともに $e^{i\omega_{nn'}t}$ の形（ここに $\omega_{nn'}$ は$\omega_{nn'}+\omega_{n'n''}=\omega_{nn''}$ をみたす）で振動するエルミート行列で表わされる。

（II） 位置と運動量を表わす行列$\underline{x}$、$\underline{p}$は同時刻で（6–11）なる「正準交換関係」をみたす。

（III） 古典論の運動方程式と同形のものが行列の間の関係として成り立つ。

あるいは、この（III）のかわりに次をとることもできる。

（III'） 運動方程式（6–16）が成り立つ。

（14） 量子力学の成立に至るまでの量子論の重要な歴史的論文は、ほとんどすべてが単名の論文であるということは著しいことがらである。そのなかで、この論文は3人の共著という点でめずらしいもので「三者論文」とよばれる。ただし、その表題は「量子力学について　II」というボルン・ペースのものになっている。念のため注意しておくと、ボルンらは自分の理論を「量子力学」とよんだのであって「行列力学」とよんだわけではなかった。「行列力学」という語には多少ひやかしのニュアンスがある。

ここで（Ｉ）、（II）、（III）のうち、（Ｉ）は行列要素の形に関するものであるのに対し、（II）、（III）は行列相互の関係として表わされるものであるので、ある意味でより基本的なものとみることができようが、それを純粋な古典論と比較したときの形式的な相違は交換関係（II）である。これは、古い量子論における量子条件のように古典論に付加された条件ではなくて、古典論における“交換関係”

$$px-xp=0$$

の右辺を $-i\hbar$ で置き換えることを意味し、そのことによって古典力学的な物理量を量子力学的な物理量に格上げするものである。そして同一の対象に対して古典論における運動方程式の形がそのまま使えるということは、古典論で考えられた系の構造の知識がそのまま新しい理論で通用することを意味する。こうして（II）、（III）は、それ自身が量子力学における対応原理の厳密な表現とみることができるものである。

さて、（Ｉ）、（II）、（III）によって問題を解いて行列 $\underline{x}$、$\underline{p}$ を求め、これをハミルトニアン $\underline{H}(\underline{x},\ \underline{p})$ に入れて行列 $\underline{H}$ を求めると、

$$\text{(IV)}\quad \underline{H}=\text{対角行列}=\begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & E_2 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & E_3 & \cdots\cdots \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{pmatrix}$$

であり、かつその対角要素 E_n は

$$\text{(V)}\quad \text{振動数条件}\qquad E_n-E_m=\hbar\omega_{nm}$$

をみたすことも示された。

物理的意味づけの面では次の点が重要である。遷移振幅は行列の非対角要素としてとらえられた。他方、一般に対角要素 u_{nn} は古い量子論におけるフーリエ級数の初項 $u_n(0)$ に対応するが、後者は $u_n(t)$ の時間的平均値に等しいから、対応原理によって u_{nn} は n 状態における u なる量の時間平均と考えられる。かつ、いまは定常状態であるので、そ

れは“期待値”といってもよい。ところで $\underline{u}$ がとくに対角行列のときは $(\underline{u}^2)_{nn}=(u_{nn})^2$ であるから、このことは u なる量が n 状態で一定値 u_{nn} をもつことと解せられる。

とにかく新しい理論では、力学量の遷移成分がはじめから系の放出し吸収する光の振動数と同じ振動数で振動しており、交換条件と運動方程式の結果として、とびとびのエネルギー準位と一緒に振動数条件が得られる。これに対して古い量子論では、量子条件と運動方程式の結果としてまず、とびとびのエネルギー準位が求まり（同時にその状態における軌道運動の振動数も求められるが、これは遷移の振動数とは別ものであり）、別に設定された振動数条件を使って遷移振動数はあとから得られたのであった。ボーア理論における原子内振動数と光の振動数の分裂が、新しい理論においては再び取り除かれるわけで、前にボーア理論の二つの部分の間のギャップといったものが、新しい理論では確かにうめられている。また前にボーア理論における h の二重性といったものも統一され、プランク常数 h は交換関係を規定するものとしてのみはいってくるとみてよいことになる。

ここで行列力学の上述の構成を図式化しておくと、次のようになる。

（Ⅰ）（振　動　型）
（Ⅱ）（交換関係）　——解——→　｛（Ⅳ）（$\underline{H}$＝対角型）／（Ⅴ）（振動数条件）｝　（A）
（Ⅲ）（運動方程式）

ところで、この（A）のスキームにおいて、（Ⅰ）と（Ⅳ）をいれかえることができる。すなわち

（Ⅱ）
（Ⅲ′）　——解——→　｛（Ⅰ）／（Ⅴ）｝　（A′）
（Ⅳ）

なぜならば、（Ⅲ′）は

$$\underline{A}(t)=e^{i\underline{H}t/\hbar}\underline{A}(0)e^{-i\underline{H}t/\hbar}$$

と形式的に解けるが[15]、これに（IV）を用いると

$$A_{nm}(t)=e^{i(E_n-E_m)t/\hbar}A_{nm}(0)$$

を得るからである。つまり、各力学量の行列要素がすべて遷移振動数で単振動するということは、力学量が（III′）なる運動方程式に従うことと、$\underline{H}$が対角型であることとの結果であるとみることができる。

とにかく行列力学においては、ある力学系（いま正準変数で定義されているとする）に対して問題を解くということは、与えられたハミルトニアンに対して（A）あるいは（A′）のスキームを数学的に解くということである。ある物理量の行列表現は、対応原理からもわかるように原子の特定の定常状態にかかわるものではなくて、すべての定常状態とその一対とにかかわるものであり、それらが交換関係と運動方程式によって相互に関連しあっているのであり、問題を数学的に解くということは一般にはすべての定常状態にわたって連立方程式をいっきょに解くということになる。しかしながら「三者論文」は、この問題の解法を研究することから、この問題がユニタリー変換とか固有値問題に移されることを見出した。こうして新奇な無限次元の行列力学の数学が、すでに同じゲッチンゲンのヒルベルト D. Hilbert らによって研究されていた種類の数学と関連づけられるにいたったのである。これを次に簡単にみてみよう。

（A′）のスキームによって解を求めるために、次のように進むことができる。まず正準交換関係

（II′）　$\underline{P}\underline{X}-\underline{X}\underline{P}=-i\hbar$

と、

（IV′）　$\underline{H}(\underline{X},\underline{P})$＝対角型

---

(15)　この式は物理量を表わす行列が時間とともに $\underline{U}(t)=e^{-i\underline{H}t/\hbar}$ なるユニタリー行列でもって $\underline{A}(t)=\underline{U}^{-1}(t)\underline{A}(0)\underline{U}(t)$ とユニタリー変換されていくことを示す。$\underline{U}(t)$ は $i\hbar\dot{\underline{U}}=\underline{H}\,\underline{U}$、$\underline{U}(t_1)\underline{U}(t_2)=\underline{U}(t_1+t_2)$ 等をみたす。

なる条件とをみたす時間を含まない行列 $\underline{P}$、$\underline{X}$ を見出すことができたとする。すると、そこで（IV′）の対角要素 $\{E_n\}$ を用いて(V)、（I）によってつくった $e^{i\omega_{nn'}t}$ なる振動因子を $\underline{P}$、$\underline{X}$ の nn' 因子にくっつけて $\underline{p}$、$\underline{x}$ なる行列をつくると、これは（III′）をみたす。すなわち

$$\left.\begin{matrix}(\mathrm{II}')\\(\mathrm{IV}')\end{matrix}\right\}\longrightarrow\left\{\begin{matrix}\underline{P},\ \underline{X}\\E_n\to\omega_{nn'}\\(\mathrm{V}),\ (\mathrm{I})\end{matrix}\right\}\longrightarrow\underline{p},\underline{x}\longrightarrow(\mathrm{III}')\qquad(\mathrm{B})$$

つまり $\{E_n\}$ はエネルギーの固有値であるが、このエネルギーの固有値を求めるという問題が分離してとりだされたわけで、運動方程式を解くということを先にやらなくてもよいことになる。すなわち（II′）と(IV′)とをみたす $\underline{P}$ と $\underline{X}$ を求めればよく、そのとき同時にエネルギー固有値のスペクトル $\{E_n\}$ も得られるわけである。

こうして問題がときほぐされてだいぶ単純化されたが、次にさらにこの（II′)+(IV′）を解くにあたって‘正準変換’の概念が中心的な役割をする。これは正準交換関係（II）と $\underline{x}$、$\underline{p}$ のエルミート性とを保持するような変換であって[16]、それは結局ユニタリー行列 $\underline{S}$ を用いて

$$\underline{x}'=\underline{S}^{-1}\underline{x}\underline{S},\qquad \underline{p}'=\underline{S}^{-1}\underline{p}\underline{S}\qquad(6\text{-}22)$$

で表わされること[17]，すなわちユニタリー変換であることが示される。このとき一般の物理量 $\underline{A}(\underline{x},\underline{p})$ も $\underline{A}\longrightarrow\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$ と変換する。

さて、まず（II′）をみたす任意の行列 $\underline{X}$、$\underline{P}$ をとると、これは一般

---

(16) これは古典力学における正準変換に対応するものであるので、やはり正準変換とよばれるわけである。古典力学において正準変換がポアソン括弧式を保存するように、行列力学の正準変換は交換関係を保存する（次節参照)。

(17) 行列 $\underline{A}$ の行と列をいれかえて複素共役をとった行列を $\underline{A}^\dagger$ と書く。物理量を表わす行列はエルミート的であったが、このことは $\underline{A}^\dagger=\underline{A}$ で表わされる。$\underline{S}^\dagger\underline{S}=\underline{S}\underline{S}^\dagger=1$ をみたす行列 $\underline{S}$ をユニタリー行列という。(6-22) のユニタリー変換では、行列のエルミート性と、行列間の関数関係が保存される。したがって、たとえば交換関係も保存される。

に $\underline{H}$ を対角型にはしない。そこで $\underline{S}$ なるユニタリー行列を使って $\underline{X}$、$\underline{P}$ を

$$\underline{X}'=\underline{S}^{-1}\underline{X}\underline{S},\quad P'=\underline{S}^{-1}\underline{P}\underline{S} \tag{6-22'}$$

に変換したとき $\underline{X}'$、$\underline{P}'$ が $\underline{H}$ を対角型にするとする。すなわち

$$\underline{H}(\underline{X}',\underline{P}')=\underline{S}^{-1}\underline{H}(\underline{X},\underline{P})\underline{S}=\text{対角行列}\equiv\underline{E} \tag{6-23}$$

とすると、(II′) と (IV′) をみたす行列 $\underline{X}'$、$\underline{P}'$ と $\{E_n\}$ が得られたことになり、問題は解けたことになる。(6-23) は左から $\underline{S}$ をかけて

$$\underline{H}(\underline{X},\underline{P})\underline{S}=\underline{S}\underline{E} \tag{6-23'}$$

とも書ける。これを行列要素を用いて書くと

$$\sum_{l'}H_{ll'}S_{l'n}=S_{ln}E_n \tag{6-24}$$

であるが、これは各 n ごとの連立方程式に分離している。すなわち (6-24) を解くことは、エルミート行列 $H_{ll'}$ に対する

$$\sum_{l'}H_{ll'}\xi_{l'}=E\xi_l\qquad(\sum_l\xi_l^*\xi_l=1) \tag{6-25}$$

なる“固有値方程式”を解くことと同じである。一般に (6-25) は任意の E の値に対しては解をもたず、とびとびの値 E_n ($n=1,2,\cdots\cdots$) に対してだけ解をもつことになり、そのような E_n は (6-25) に対する“永年方程式”

$$\det|\underline{H}-E\underline{1}|=0$$

を解くことによってきまる。そして、この各 E_n に対して (6-25) を解いて $\xi_l^{(n)}(l=1,2,\cdots\cdots)$ を得るが、これは S_{ln} を意味する (すなわち $S_{ln}=\xi_l^{(n)}$) から、行列 $\underline{S}$ 自身もきまることになり問題は解かれたわけである。

要するに問題は (6-25) を解くことに帰着したが，この問題は、無限個の変数をもつ二次形式 $\sum_{ll'}H_{ll'}\xi_l\xi_{l'}^*$ の主軸変換の問題にほかならず、

楕円体の主軸の長さと方向をきめるという幾何学的問題の一般化であって、ヒルベルトがあつかった問題の拡張になっている。

注目すべきことは、問題のこのような数学的変形を通じてユニタリー行列Sとか、n番目の定常状態にあてがわれた$\xi_l^{(n)}(l=1, 2, \cdots\cdots)$なる数列とかのような、新しい量が登場してきたことである。それらは物理量を表わすものではないが、理論の数学形式において重要な地位を占めている。そういうふうな仕方で理論に入ってくる量が、やがて何かある重要な物理的意味をになうものであることが判明してくるというのが物理でしばしばおきる事態である(18)。ボルンらは、ハミルトニアンを対角化する方程式 (6-24) あるいは (6-25) が古典力学におけるハミルトン-ヤコービ方程式に類似していることに気づいたのだが、そこに現われる数列 $\xi_l^{(n)}$ (“固有ベクトル”) が‘定常状態の表現’という意味をもつことには——波動力学の出現以前には——気づかず、ましてその物理的意味づけを考えるところまでいかなかった。ユニタリー変換の概念は、上にみたように元来、行列力学の解法に関係して出てきたわけであるが、のちの変換理論に導く基礎となるべきものであり、量子力学の論理構成において中心的な概念となっていくのである。

問題は線型の方程式 (6-25) を解くということに還元された。それでもなお、これを直接解くことは、無限個の未知数を含むため一般に困難である。そして、これと数学的に同等な解析的問題(波動方程式)を解くほうが容易なことがのちになってわかる。しかしながらボルンらは、(6-22′)、(6-23) にもとづいて摂動論を展開した(19)。すなわち出発点になる行列 $\underline{X}$、$\underline{P}$ として無摂動系の解をとり、これに正準変換 (6-22′) をほどこして全ハミルトニアンを対角型にするような$\underline{S}$を逐次近似で求める。この方法によって彼らは行列力学の立場で先のクラマース-ハイゼンベルクの分散公式を基礎づけることができた。

---

(18) たとえば統計力学における状態和。

(19) これは彼らが前期量子論において展開した摂動論が、新しいスキームで刷新されることを意味している。

「三者論文」では、また多自由度の場合への一般化もなされている。そのためには、もとの1自由度の場合に見出されていた正準交換関係（6-11）を、単に

$$\begin{array}{l}[\underline{x}_r(t),\ \underline{p}_s(t)]=i\hbar\delta_{rs}, \\ [\underline{x}_r(t),\ \underline{x}_s(t)]=[\underline{p}_r(t),\ \underline{p}_s(t)]=0\end{array} \quad (r, s=1, 2\cdots\cdots, f) \qquad (6\text{–}26)$$

へと一般化すればよい。前期量子論においては、量子条件を多自由度の場合に拡張するためには、多重周期系というような窮屈な制限を必要としたが、いまはそういう制限はなく、単に（6–26）なる形式的拡張で多自由度の場合への移行がきわめてスムースにはたされるということは、新理論の大きな強みである。

こうして、いまや行列力学で縮退や角運動量をあつかうことができる。実際、軌道角運動量成分について、（6–26）を用いて

$$[\underline{J}_i,\ \underline{J}_j]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\underline{J}_k \qquad (6\text{–}27)$$

なる閉じた交換関係が導かれる。ここでもしあらためて（6–27）なる代数から出発するならば、この代数は $\underline{J}_i$ の有限次元の行列（次元数＝1, 2, 3……）を用いてみたされ、その一つの成分（たとえば $\underline{J}_3$）を対角行列とみたとき、その対角要素（“固有値”）は、$\hbar$ を単位として

$$m_j=-j,\ -j+1,\ \cdots\cdots,\ j$$

なる値をとり、ここに j は整数または半整数 $\left(j=0, \frac{1}{2}, 1, \cdots\cdots\right)$ である。$\overrightarrow{\underline{J}}^2$ の対角要素は $j(j+1)\hbar^2$[20] で、それぞれが $(2j+1)$ 重に縮退している。さらには選択則、ゼーマン成分の強度則なども導かれた。要するに、のちに回転群のユニタリー表現の理論となるべきものがそのリー環に対する純代数的方法でくわしくしらべられたわけである。たしかに行列力学は、この問題をあつかうには便利だったのである。一般に行列

（20） $\overrightarrow{\underline{J}}^2$ の固有値として $j(j+1)$ が自然に出てきたということは、前期量子論にまさる重要な成果である。これは $\underline{J}_i$ 相互の非可換性によっている。

力学の方法は有限次元の部分空間をあつかうのには適している。

いまや、早くも行列力学は成立した。この理論は新しい哲学と新しい概念にもとづき、しかも新しい数学で武装して現われ、前期量子論よりも論理的にはるかにすっきりしており、形式的にも一応完備している。しかし、それはまだ1個の「量子力学」として完全なものとはいえない。そのわけを二、三のべよう。この理論は原子内のエネルギー準位と遷移振幅を一貫した方式で導くが、それからの光の放出の強度に関しては、対応原理的な関係（5-8）をそのまま ad hoc に採用する点で[21]、もとのハイゼンベルクの理論からなんら進歩していない。この関係そのものも、新しい理論の立場でそのなかから導けるものであることを示しえなければならないはずだが、それには、クーロン力で束縛された電子としての原子の力学のみならず、光と電子系との相互作用を新しい理論の立場からあつかえるようにせねばならないだろう。そのさい、同時に光が波か粒子かという、なおそのままになっている光の二重性の矛盾に解決を与えることが要望される。

しかし、すでにみたように、粒子という時間空間的な描像は電子についてもぼやけてしまった。元来、ハイゼンベルクは観測可能な量のみを相手にするという見地をとり、原子内電子の普通の意味での位置や運動量というものを廃棄した。（もっとも、やがて定常状態における電子の位置などについて、その平均値というものを問題にできることがわかったが、電子の粒子的な描像が捨てられたのだから‘平均値’ということの意味がまだ明らかでない。）ところで、単にこのように考えるだけでは、新しい理論と古典論との間の概念的なつながり、移行関係を明らかにすることができない。これを明らかにするということは、古典論はたしかにマクロの運動において成り立っている以上、そしてミクロの領域とマ

---

(21) じつは、さらに行列要素は原子に属し原子を記述するものなのであるから、$n \to n'$ なる遷移による光の振動数が nn'-行列要素の振動数に等しいこと自体も、ハイゼンベルクの理論のなかにやはり一つの仮定として暗黙のうちに含まれているといわねばならぬ。

クロの領域とはたがいに切り離されたものではなくて連結するものである以上、必要なことである。

行列力学でさしあたり扱うことのできるのは原子内電子のエネルギー準位や遷移確率のような問題であるが、このような場合には原子内電子の位置というようなものは一応実験的に問題になってこない。ところが、一方において電子線の屈曲とか散乱のように電子の位置や運動量が問題になる多くの実験がある。たとえば霧箱のなかを電子が走って飛跡を呈するような場合、電子の近似的な軌道というべきものが観測される。あるいは単に静的な力の場において電子の流れが弾性散乱をこうむる過程を問題にしようとすると、ある位置にあるスリットから流れ出た電子がある方向にどのような強度で散乱されるかということに対して答えねばならぬ。しかし、これまでの理論ではこのような問題にどう対処すべきかわからない。

ところで、こういう場合にたしかに電子の位置というものがなんらか問題になりうる以上、電子が原子内に束縛される場合に、途端にその位置というものがまったく意味を失うというのは考えがたいことである。原子内の電子についても、位置をなんらかの方法で観測しうるのではないかという疑問が当然おきてくるわけである（第11章参照）。このような難点は、これまでの行列理論は、形式的に一応完成したようにみえていても、なお一つの理論体系としては、なにかある本質的な要素を欠いていることを意味する。つまり、それはまだ形式的にも狭いのであり、そのことに対応して理論の物理的意味づけを十分に展開させていないことを示すものである。そして電子というようなものに対して古典的な粒子の描像は捨てられるにしても、われわれはこれまでの説明が与えているようなはなはだ形式的・操作的な考え方以上に、もっとまとまった新しい実体的な概念の再形成を期待してよいはずである。一般に行列力学は形式面で発達したけれども、物理的解釈の面ではほとんど進展がないのである。

行列力学は、物理量がたがいに非可換的な量（具体的には行列）で表わされるという古典論とはまったく異なった量子力学の基本的な性格を

はじめて明白にとらえたこと、この非可換性を別とすれば、物理量相互の関係や運動方程式が古典論と同じ形式に従うことを認識し、こうして古典論と量子力学との間の対応関係を精密に定式化したことに、その一般的・抽象的本質がある。一方、この理論の特殊性は、エネルギーを表わす行列が対角的になり、各物理量を表わす行列の要素がすべて遷移振動数で振動する場合に局限されていることである。このことは、系の状態というものがいぜんとして、もっぱら定常状態（エネルギーの固有状態）としてのみ理論に登場することを許されている（それは量子数、すなわち行や列の'番号' n で示される）ことに対応しており、そのためにこの理論は、エネルギーの準位、エネルギー以外の量については定常状態における平均値、定常状態間の遷移確率（これには対応論的手続きを援用して）などを与えることはできたが、定常状態以外を問題にすることができず、位置とか運動量の測定が問題になるような実験をあつかうことができなかったのである。

つまり行列力学は、元来、定常状態と遷移を別個の運動様式として考えるボーア－ゾンマーフェルト理論を追いつめていって成立したという事情のために、"状態"というものが量子数で示される定常状態としてしか登場しないことが欠陥である。粒子の'波動性'の側面を欠いているために"重畳の原理"が認識されていず、いろんな定常状態を重ね合わせたような非定常状態が理論のなかに登場するにいたらないということが、形式的にも概念的にもその本質的な欠陥であって、そのため原子の遷移というものを――それが光との相互作用によるにせよ、他の粒子との衝突によるにせよ――この行列力学のなかからひき出す余地がないのである。非定常状態という概念が用意されないことには、遷移は定常状態からきりはなされ、そのあつかいについて対応原理への依存をたち切ることができない。[22]

(22) のちに定常状態の方法で遷移をあつかうことも可能になるが、そのためには波動関数に対する境界条件とその確率解釈、また遷移が観測による状態の収縮に関係しているということの認識がともなわねばならなかった。

また行列力学の形式は、元来、離散的な定常状態（束縛状態）とその間の遷移に適したものであって、そのままでは連続スペクトルに属する定常状態（非束縛状態）およびその間の遷移の記述にむいたものではない。実際、ハイゼンベルクが、もっぱら原子のボーア的定常状態とその間の遷移によりつつ原子の行列力学を見出したことは特徴的であったが、前にものべたように、遷移という概念自体は――したがって遷移確率も――非常に一般的な性質のものであることを認識する必要がある。たしかに遷移確率という概念は最初原子の離散的な始状態から離散的な終状態への遷移の場合について導入された。この場合は、遷移を確率的に記述するほかないことはもっとも明らかである。しかしながら、この概念は光電効果とか電子の非弾性散乱、コンプトン効果などのように、始状態と終状態の一方または両方が連続スペクトルに属するような場合にも一般化されるべきものであり、そのことによって量子的な力学的過程について一般に強度（断面積）というものを論理的に一様な仕方であつかえることになるのである。たとえば、ラザフォードがα粒子の弾性散乱の角分布の古典論的計算のさいに用いた確率の考えのごときものも、ボルツマンが気体運動論で用いた「衝突数の仮定」に類するものにとどまらず、いまや量子論的本性の遷移確率にもとづいて捉えなおされるべきことが期待される。しかしながら、行列力学はこれらの場合を記述するのにむいていない。

ここにあげてきたような行列力学の欠点――それはパウリのほかボルンやハイゼンベルク自身によってある程度感知されていた――は、やがて登場するシュレーディンガーの波動力学とそのボルン解釈とによって埋め合わせられ、上にあげた遷移確率のいろんな例もすべてこれで答えられることになる（第8・9章）。

ただし、話はそれにとどまらない。行列力学は、そもそも系はどれかの定常状態にあり、その間で遷移が（観測と無関係に）おこるという、もとのボーア理論の根本的な考え方をそのまま受けついでいるが、じつはこの考え方自体が解釈上の困難に関係するものなのであり、いずれは批判的に検討されねばならないのである。

しかしながら、「三者論文」がヒルベルトやヘリンガー E. Hellinger による無限個の変数の有界な二次形式の主軸変換の理論から類推して、いまの場合——交換関係(6–26)のためエルミート形式が有界でない——にも、一般に離散スペクトルのほかに連続スペクトルが存在することをすでに論じていることは重要である。両方のスペクトルが基礎方程式の結果として自然に出てくるということは、前期量子論にはみられなかった新理論のメリットであることを彼らは指摘しているのである。ただし行列形式のままで連続スペクトルの場合をとりあつかうのは厄介である。[(23)] この場合、行列といっても、その行列の‘番号’が連続変数になる。

行列力学の限界の面についてのべてきたが、他面、行列力学が一般的な性格をもつことも強調しておかねばならない。ことに正準交換関係（II）ないし（6–26)、運動方程式（III′)、固有値方程式（6–25）などは、すべて量子力学の基本的な方程式そのものである。行列力学は原子内電子というような特殊な力学系の問題から発見されたとはいえ、いまあげた交換関係や運動方程式は正準理論の立場からみてまったく一般的なものとみなされ、(6–26) で $\underline{x}_r$、$\underline{p}_r$ と書いたものは正準共役な量であればよいのであって（ただし $\underline{x}_r$ は“直交座標”の要がある)、別に“粒子の位置と運動量”という意味をもっていなくてもかまわない。したがって、古典的にハミルトニアンがわかっている力学系は、拘束のない単純な場合については、それを行列力学に移すことは（積の順序の問題などを別として）形式的には簡単である。実際、「三者論文」は、この立場で電磁場の量子化に着手しており、それにもとづいて光の粒子－波動の二重性を反映するアインシュタインのエネルギーのゆらぎの式などをひき出しているのである。これは光量子のボース統計を理解させるものであるが、この理論はそれ以上進んで、光と電子の相互作用を量子力学的枠組のなかであつかう手だてを欠いている。

なお行列力学でいろんな物理量はすべて行列になったが、時間 t だけ

---

(23) このような場合を行列力学的手法を拡大してあつかうゆき方はディラックによってすすめられ、それがやがて変換理論につながることになる。

はいぜん昔のままのパラメター（“c－数”）である。このことは、行列力学は単純には相対論的な——つまりローレンツ不変な——ものに改変できない性質のものであることを含意しているであろう。

§6・3　その他の発展

ハイゼンベルクの最初の仕事はまた、ケンブリッジの若い（当時23歳）奨学生ディラックの反応をよびおこした。ファウラー R. H. Fowler を通じてハイゼンベルクの論文の校正刷りを入手した彼は、この理論の核心が物理量の非可換性にあるとみて、これにもとづいて理論を組み立てるやり方を進めた。イギリスでは長くラザフォードの強い影響で実験優先でありすぎて、量子論への寄与にたちおくれてきたが、1925年11月に書き上げられたディラックの論文はイギリスのプレスティージを挽回するかのような異例の駆け込みで、*Proc. Roy. Soc.* 誌の同年12月号に掲載出版された。

ディラックは、ハイゼンベルクの新理論は普通の力学のなかへ非可換性を導入したものであるとみる点でボルンらと同じ立場にたつわけであるが、彼はケンブリッジで一人でやっていたのでゲッチンゲン・グループとはちがった独自のスタイルで仕事を進めた。彼はハイゼンベルクの算法を、力学量を表わす“q－数”に対する非可換代数として、もっとシンボリックにあつかうのである。ハイゼンベルクは行列を知らずに行列力学を見出したが、ディラックも「行列」との関係は気づかず、むしろ数学者の数学にはないような自己流の数学「量子代数」をつくりつつ進むのである。(24)

同時に彼は、前期量子論が力学のハミルトン形式によって書かれていることの延長として、やはりハミルトン形式にそって議論を進める。そして“q－数”は多重周期系の場合には遷移振幅の集まりで表わされるものであり、この場合のフーリエ成分と遷移振幅との対応を通じて、この

(24)　彼のこういう流儀は、やがて‘δ-関数’の導入や、ブラ（bra、括）とケット（ket、弧）の使用、その他のアルゴリズムにまで発展していくことになる。

代数における交換子の対応物が古典力学の正準形式にでてくる「ポアソン括弧」なる量であることを見出した。この発見によって、古典力学と量子力学との対応関係が見透しよくなった。すなわち、ある力学系について古典力学からハイゼンベルク流の量子力学へ移るということは、前者の正準形式における二つの力学量 $A(x, p)$、$B(x, p)$ の間のポアソン括弧を含む関係式においてポアソン括弧を次のルールによって対応する q-数 $\underline{A}$、$\underline{B}$ の交換子で置き換えるということである。

$$\{A, B\}_{\text{P.B.}} \equiv \sum_r \left(\frac{\partial A}{\partial x_r} \frac{\partial B}{\partial p_r} - \frac{\partial B}{\partial x_r} \frac{\partial A}{\partial p_r} \right)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{i\hbar}(\underline{A}\underline{B} - \underline{B}\underline{A}) \qquad (6\text{–}28)$$

ここに $\hbar$ は次元をあわせるために必要な普遍常数であり、それがほかならぬ作用量子である。

実際、古典力学における $\{x_r, p_s\}_{\text{P.B.}} = \delta_{rs}$ から、(6–28) のルールにより直ちに前記の (6–26) が得られ、古典力学における運動方程式

$$\dot{A} = \{A, H\}_{\text{P.B.}}$$

から、再び (6–28) のルールによって直ちに行列力学の運動方程式 (Ⅲ′) が得られる。つまり行列力学の基礎法則 (Ⅱ)、(Ⅲ′) が、(6–28) なるルールに統一される。

古典力学と量子力学の間のこのような対応関係が成り立つからには、前者において重要な役割をする正準変換の対応物を量子力学において研究するのは自然であり、それがのちの「変換理論」へつながっていくことになる。そして「三者論文」の場合にしろ、ディラックの場合にしろ、量子化が古典力学の正準形式にもとづいており、したがってまた、その

---

(25) 理論の発展とともに、直接ラグランジアンから出発して量子化する方法(ファインマンの径路積分)が発展された (1948)。また古典的ラグランジュ形式やハミルトン形式に依拠せずに量子力学的モデルをたてるいろんな方法も当然研究されることになる。

背後にラグランジュ形式の存在を予想しているとみなせることにかわりはない。(25)

さて、「三者論文」とこのディラックの仕事とによって、行列力学の数学形式は大いに整備されたが、まだそれによって水素原子の問題が解かれていないというのは画龍点睛を欠くことであって、この点ではゾンマーフェルト以前にまいもどった観がある。このような、本質的に3次元的な問題を行列力学で解くのは非常に複雑困難なことにみえた。ところが水素原子の問題に関して1926年1月に三つの重要な論文が書かれた。それぞれの著者はパウリ、ディラック、シュレーディンガーである。

パウリはハンブルク大学にあって、ハイゼンベルクからその仕事の進捗について当初から逐一知らされていたわけであるが、ついに水素原子の問題を行列力学で解いてみせた。この問題は離散スペクトルと連続スペクトルの両方を含むことが行列力学的あつかいを困難にしているのであるが、彼は保存するレンツ・ベクトルと角運動量ベクトルとでもって閉じた代数(26)がつくられるということに注目することによって、離散スペクトルに属する固有状態を分離してあつかうことができ、こうしてバルマー項を導き出した。この強腕と技巧は人々をおどろかすものであったが、(27)エネルギー固有値を得ただけであって、行列要素 x_{nm} を算出することはできなかったのだから、問題を部分的に解いたにすぎない。また行列力学が、もとをただせば水素原子のボーア理論から発展してきたものなのだから、いま水素原子のエネルギー準位が回収されたからといって、それだけでは大成功というほどのものではなかろう。この仕事の成果はむしろ、方位量子数 l が古い k から1だけずれるということ（$l=k-1=0,\ 1,\ 2, \cdots\cdots, n-1$）が自動的に出てきたこと、またゾンマーフェルト理論では困難を生じた交叉する電場・磁場が加わった場合も解け

(26) これは束縛状態について高次対称性 $O(4)$ のリー代数に相当する。

(27) 同じ問題に対して、ディラック（第2論文）のほうは2次元のクーロン力という仮想的な場合について解いたにすぎなかった。シュレーディンガーのあつかいは新しい波動力学によるものであって、これについては§8・1でのべる。

たということにある。とにかくこのパウリの仕事は、行列力学がたしかに自然を正しく反映するものであることについての信用を深めるのに役立った。

以上、全部をひっくるめても、行列力学は実験事実を説明するという面で前期量子論をこえるような具体的成果は比較的少なかった。ところが、ちょうどそのときシュレーディンガーの理論が出て新しい展望をひらくにおよび、事態はまたまた急変することになる。

行列力学が展開しつつあったころ、他方ではハウシュミット－ウーレンベックによる電子スピンの仮設が出て、大いに物議をかもしていたことは前にのべた。ハイゼンベルクやパウリらもこの過程に介入していたのであるが、1926年3月にいたり、ハイゼンベルクとヨルダンは1個の価電子をもつアルカリ原子についてハウシュミットらの理論を行列力学の言葉で表現し直すことに成功した。

すでに先の「三者論文」は、角運動量についてその交換関係のみにもとづくならば、角運動量が整数のほか半整数固有値をとる可能性があることを示し、かつ両方の場合についてその行列表現を与えていた。この半整数固有値は軌道運動によっては実現されないが、行列力学が角運動量に対してもたらす新しい可能性としてきわめて注目すべきものであり、スピンにうってつけである。そこでハイゼンベルク－ヨルダンは、とくにその $j=\frac{1}{2}$ の表現であるマトリックス・ベクトル $\underline{s}_i(i=1,2,3)$ を電子のスピンを表わすのに採用する。その行列が2行2列の簡単なものであることはすでにわかっており、その成分は $\pm\frac{1}{2}$ なる固有値をもつ。そして、この $\underline{\vec{s}}$ が外磁場とは $\frac{e\hbar}{2mc}2\underline{\vec{s}}$ なる磁気能率をもって結合し、また電子の軌道角運動量 $\underline{\vec{l}}$ とは $\underline{\vec{l}}\,\underline{\vec{s}}$ に比例するトーマス項で結合するようなハミルトニアンをおくならば、行列力学によってこの原子の2重項分離と異常ゼーマン効果のランデの公式が摂動論的に導かれることが示された。

---

(28) 量子力学的にはスピンの $\sqrt{\underline{\vec{s}}^2}$ の意味での大きさは $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ となる。

ハウシュミットらは[28]、スピンはその角運動量の大きさが$\frac{\hbar}{2}$にきまっていて、ただその方向だけが変わりうるような自転と考えたが、ハイゼンベルクらのこのあつかいでは、自転を表わす方位角を用いた記述によって半整数固有値を導いてみせるという必要はないのであって、電子が軌道運動のほかに固有角運動量の成分として上のような性質をもつ三つの$\underline{s}_i$なる量の組をもっているとすれば十分であるとしているわけで、スピンを再び自転の描像から解放しているところに特色がある。もっともトーマス項をおくところでは対応原理にたよっている。

スピンは、じつは量子力学的モデルの例として、軌道運動とともに最も典型的なものであり、しかも最も簡単なもの（軌道運動との結合などを考えないなら）なのであるが、スピンの量子力学には対応原理的アプローチと正準量子化に固執することはさしあたり適当でないという点が、軌道運動の場合とちがったその特徴である。それは、むしろこの物理空間が3次元回転を許すということと量子力学とのなかにひそんでいる新しい可能性のあらわれとみるほうがあつかいやすいのである。この点ハイゼンベルクらのあつかいは適切なものであった。ただしそれで十分だというのではない。スピンについても、その完全なあつかいには、波動力学的な側面をおぎなわねばならないことがのちに認識される（第12章）。

なおパウリ原理については、行列力学はそのままではこれを収容する道具立てを欠いていた。それゆえ行列力学はそのままでは多電子系を正当にとりあつかうことができないのであって、この点もこの理論の欠陥である（ただし第13章参照）。

第7章　物質波

§7・1　ドブロイの理論

量子力学の形成史の、ことにきわだった特徴は、量子力学へのアプローチとして、その発想においても、方法においても対蹠的・対立的な二つの道があり、この両方の探究の線が織り合わされることによって、量子力学の完全な理論がつくり上げられたということである。第一の道はボーア理論から出発して、対応原理を指導原理として進み、「行列力学」に達するハイゼンベルクらのコースであって、これについては前章までにのべてきた。このゆき方での一つの特徴は、ボーアが光量子をさけたことにも関連することであるが、光と電子のあつかいに著しい非対称性 (disparity) をもって進む点である。ところが第二の道(ドブロイ、シュレーディンガーによる)では、むしろ光と物質のアナロジー、あるいは光と物質とにわたる普遍性 (universality) ということを指導原理とするものである。そもそもアインシュタインの光量子説がそういう立場であったが、いまや光についての二重性を物質へとおし拡げることによって物質粒子の波動性を想定し、これを追求していって、まず物質粒子についての「波動力学」の形式に達するのである。

第一のアプローチは、量子論研究の主流をなした多数派によって追求されたのに対して、第二のアプローチは、主流からはずれたところでごく少数の人々によって開拓された。そして両方のアプローチは、いろんな面でスタイルを異にしている。前者が批判的・実証主義的であり、時空的描像を捨て不連続的遷移を強調するのに対して、後者はより綜合的・直観的・実在論的であり、時空的描像にたち、連続性を基礎とする。量子力学への道として、このような二つの対立的なアプローチがほとん

ど独立におこったという歴史的事実は、方法論的に重要な意味をもつことがらであり、かつまたこの対立の統合を通じて、‘よく育った量子力学’の完成がいちじるしく加速され、量子力学の内容は驚異的なスピードで豊かにされることになるのである。

対応原理を指導原理とする第一の道は、主として原子と輻射場との相互作用の問題にかかわって進みつつ、最後にこの相互作用の問題から原子の力学の問題を分離することによって行列力学を発見するに至ったことは前章にのべた。そこでは、理論は豊富で精密な分光学の実験事実に支えられたことが有利であった。この華麗な分光学の発展に比べて、電子の精密な散乱実験は真空などに関する実験技術的理由のためにおくれており、そのことが電子の波動性の認識をおくらす結果になった。それでも、電子を原子や結晶で散乱させる実験はあちこちで進められており、そこではおぼろげながら電子の波動性を示唆するような事実も出はじめていたのだが、そうとは気づかれずにすぎた。しかしながら、直接の実験的証拠によるのではなく光と物質との一般的なアナロジーにもとづいて物質の波動性を想定する大胆なアイディアが生まれ、それは対応論学派とはまったくちがった斬新な観点をうち出すことになったのである。この第二の道においては、第一の道におけるように原子と光の相互作用というやや高度な問題から出発することも、問題を多重周期運動に制限することも必要でなく、むしろ光と物質粒子との、また光学と力学との類比を直接的に追求することから出発するのである。

第一の道が遷移振幅の概念を通じて物理量の非可換性の原理をもたらしたのに対して、第二の道は波動像を通じて状態の重畳の原理をもたらすことになる。そして、この両原理を組み合わせることによってのみ、量子力学の完全な定式化と解釈――変換理論・不確定性原理などを含む――が成し遂げられることになる。しかも話はそれにとどまらない。この第二の道はさらに**物質の波動場**という本質的な――量子力学の発展にさいして決定的に重要な――概念をもたらすことになるのである。

さて光と物質、あるいは光学と力学の類比といったのは、単なる機械的な模倣といったものではなくて、物質粒子、ことに電子が、光とどの

ような意味で共通性をもち、同時にどのような異質性をもつかを物理的にほりさげていくことを意味する。

古くハミルトン W.R. Hamilton は質点力学と幾何光学との形式上のアナロジーを追求し、さらに力学における作用関数一定の面と波動光学の波面との対応を指摘していた。一方、アインシュタインが光の粒子性と波動性の対立を新しい形で復活し、光の二重性の問題を追求したことは前にみた。

光の二重性というのは、光がある現象では波として、他の現象では粒子としてふるまうように現われるということであった。しかし、いろいろの簡単な効果は波動論によっても粒子論によっても説明でき、したがって、このような現象については“粒子波動並行論”が成り立つことにまず注意せねばならぬ。すなわち、一方ではたとえば輻射圧やドップラー効果、他方では屈折（屈曲）のような幾何光学的現象は、光を粒子としても波としても説明できるのである。このような場合、アインシュタインの関係

$$E=\hbar\omega=h\nu \qquad (7\text{–}1)$$

$$\vec{p}=\hbar\,\vec{k},\ \text{それゆえ}\ p=h/\lambda \qquad (7\text{–}2)$$

$$\text{ただし}\ \omega=ck,\ \text{すなわち}\ \nu\lambda=c \qquad (7\text{–}3)$$

は、一方の立場による説明を他方の立場による説明に翻訳するコードを与える。ただし、このような場合、(7–1)、(7–2) は比例関係としての意味だけが重要なのであって、h の数値自体は結果にきいてこない。

さらに光量子説の直接的な証拠と考えられるコンプトンの“ずれ”を波動論の立場で導き出すことも不可能ではないし（これは前にのべた）、格子による回折を粒子論の立場で説明することも不可能ではない（デュエン W. Duane、1923）。これらの場合は (7–1)、(7–2) 式の h が本質的である。

ところで、このような並行論は、結果の一致をもたらすけれども、過程の機構の解し方はもちろん異なっている。たとえばコンプトン散乱について、波動論では散乱光は波として同時にあらゆる方向に拡がってゆ

くと考えねばならぬが、粒子論では個々の散乱では1個の光量子が特定の方向に散乱され、それらの統計的な結果として各方向への角度分布が生じると考える。したがって、いずれの説明が正しいかは、1個の光量子に相当するような弱い光[1]についてしらべれば判定されよう。実際コンプトン－サイモンの実験においては光量子説が妥当する。

こうして一般に要素過程では粒子説が正しいようにみえるかもしれないが、これが困難を含んでいることは、前に二つの穴による1個の光量子の干渉の例においてみた。単純な粒子論、単純な波動論は、ある場合には一方が、他の場合には他方が当てはまるが、そのいずれもそれだけでは十分ではないのである。コンプトン－サイモンの実験は、そのような実験条件のもとで粒子性が現われるということを示すものなのである。

とにかく波と考えられていた光についてある程度まで粒子波動並行論が成り立つとすれば、粒子と考えられてきた電子（一般に物質粒子）についても同様の事情があるのではなかろうか。すなわち、これまで電子を粒子とみて説明してきたわかりきったような効果（たとえば外場での電子線の屈曲）も、じつは電子を波としてもある程度まで説明できるであろう。さらにそれにとどまらず電子が典型的に波のようにふるまう場合もあるのではないだろうか。

こうして光の二重性と、もう一つは原子内電子の定常状態の不連続性という、従来の量子論の二つの基本的なモチーフに関連して[2]、量子論の第三の基本的なモチーフ、すなわち電子の波動性のアイディアをドブロイが提出した。

われわれはすでに行列力学の形成についてのべたが、これからの話はその2年ほど前にさかのぼることを注意せねばならない。ルイ・ドブロイはランジュヴァンやまたX線の実験家である長兄モーリス Maurice de Broglie から影響をうけながら、しかし量子論の中心地からは離れた

---

(1) 光電効果の場合にも、弱い光の場合の考察から光量子を考えねばならなくなったのと同様である。

(2) この第二のモチーフとの関連はあとで説明する。

ところで研究していた。そのせいもあって、当時の主流とは毛色のちがった奇抜な、しかし決定的なアイディアを出すことができた。その仕事は1923年9月からはじまり翌年にかけてフランス・アカデミーの *Comptes Rendus* に五つのノートとして出され、最後に学位論文にまとめられた。

ドブロイの考え方の特徴は、一方でアインシュタインの光量子を非常に実在的なものとしてうけとりつつ、同時にこの粒子性と光の波動性を直観的な形で結びつけることをもとめたことである。すなわち彼は、光量子の実在に批判的であったボーアとは反対に、光量子を“光の原子”とよび[3]、しかもこれに（非常に小さな）質量 m_0 を付与して、他の粒子と同格なものとみるうけとり方をした。そうしたうえで、光の粒子性と波動性を結びつける方法を考えるとなると、その議論は別に光量子のみでなく任意の粒子にも当てはまることになる！　ただし彼の“粒子と波を結びつける”という課題はデリケートな性質のものである。粒子の力学と波動論というような、モデルとしても、数学形式としても、元来異なる二つの理論をぴったりとマッチさせるということはできないのであって、当然ミスマッチ（食い違い）をともなうが、まさにそこが問題の中心である。

ドブロイのゆき方のもう一つの特徴は、（特殊）相対論を指導原理としたことである。

さてドブロイの成功のもとになったことは、量子論の出発点となった $\varepsilon=h\nu$ なる関係を、プランクともアインシュタインとも少しちがった仕方で解釈した（すぐ下でみるように）ことにあった。自由な粒子は、その静止系 K_0 において

---

(3)　ドブロイはコンプトン効果が発見される以前から、アインシュタインの光量子を直観的な形でうけとっていた。彼の最初の仕事（1922）は、この“光の原子”を用いてヴィーンの分布式を気体運動論的にひき出したものであった。なおのちに彼は、空洞輻射がこの“光の原子”が 1, 2, 3, ……個集まって“分子”をつくっているものの混合物であるとするならば、プランクの分布式が出ることを示している（1924）。

$$E_0 = m_0 c^2$$

なるエネルギー E_0 をもっている（アインシュタインの関係）が、同時にそれは

$$E_0 = h\tilde{\nu}_0 \tag{7-4}$$

できまる振動数 $\tilde{\nu}_0$ の周期現象を内蔵すると彼は考える。すなわち、粒子はすべてめいめいが時計のようなものであって、静止系でみて $\tilde{\nu}_0 = m_0 c^2/h$ なるリズムの脈搏をもつとみる。[4]

そこで次に、この関係の相対論的変換性をしらべる。この粒子が v なる速度で走ってみえるローレンツ系 K で考えると、粒子時計の振動数は

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{7-5}$$

のはずである（これは動いている時計の遅れの関係にほかならない）。またエネルギーは

$$E = mc^2 = m_0 c^2 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

であるから、[5] K 系では E と $\tilde{\nu}$ の関係は

$$E = h\tilde{\nu} \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (\therefore E\tilde{\nu} = E_0\tilde{\nu}_0) \tag{7-6}$$

となる。これは、しかし、このままでは相対論的共変な関係にもたらすことができない。[6] これを共変な関係にもたらすには、さらにこの粒子内の周期現象といつも位相のあっているような（“仮想的な”）波が粒子の運動に随伴していると考える必要があることを彼は認めた。[7] まず静止系

---

(4) この $\tilde{\nu}_0$ は粒子がプランクの振動子であるときは固有振動数 ν_{mech} ではなくして、むしろ $n\nu_{\mathrm{mech}}$ に相当する量であることに注意。

(5) 本章に限り、静止質量を m_0 と書き、$m_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ を m と書く。

(6) $\tau = 1/\tilde{\nu}$ なる量を導入し、これを4元ベクトルの時間成分とみれば可能である。

では、この波は当然 $\nu_0=\tilde{\nu}_0$ なる振動数をもち、粒子時計とつねに位相のあった定在波である。これはK系では

$$\nu=\frac{\nu_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{mc^2}{h} \tag{7-7}$$

なる振動数の波であり、この ν は前の $\tilde{\nu}$ とは異なり、

$$\nu=\tilde{\nu}\Big/\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{7-7'}$$

の関係にある。そしてEとの関係は (7-6) のかわりに、アインシュタインが光量子について考えたと同じ

$$E=h\nu,\quad すなわち\ E=\hbar\omega \tag{7-8}$$

となる。(静止系では $E_0=h\nu_0$ であったから、(7-8) はEと ν の間の共変な関係である。) さて、この波の位相速度を u と書くと、波の位相は(いま粒子が x 方向に走っているとして) $\varphi=2\pi\nu(t-x/u)$ のように変化する。ところで、粒子は時刻 t には $x=vt$ のところにきているので、そこで波は $\varphi=2\pi\nu(t-vt/u)$ なる位相をもつ。一方、そのときの粒子時計の位相は $2\pi\tilde{\nu}t$ であるから、両位相がそろうためには

$$\tilde{\nu}=\nu\left(1-\frac{v}{u}\right)$$

すなわち (7-7') により、

$$u=\frac{c^2}{v} \tag{7-9}$$

であればよい。

この結果は、静止系で $A\sin(2\pi\nu_0t_0)$ なる定在スカラー波は、K系ではローレンツ変換のため

---

(7) ボーアは、原子内電子の軌道運動の振動数と、その遷移によって放出される光の振動数を区別したうえで、両者の関係を追求した。これに対しドブロイは、粒子の包蔵する周期現象の振動数と、粒子に伴う位相波の振動数を区別し、両者の関係を追求したことになる。

$$A\sin\left(2\pi\nu_0\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

に移ることからもわかる。粒子時計と随伴波との位相がそろうべしというドブロイの要請は、ローレンツ不変な関係なのである。

とにかく (7-9) は、波の位相速度uが粒子の速度 v と食い違う（光量子のように$m_0\to 0$ のときだけ両者は一致するが）ということであって、これが決定的に重要な認識であった。しかもこの u は超光速である。また波の波長は (7-7)、(7-9) から

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{h}{mv}=\frac{h}{p} \qquad \text{あるいは}\ \vec{p}=\hbar\vec{k} \tag{7-10}$$

となる。ここに$\vec{k}$は波数ベクトルである。そして (7-7)、(7-10) から v を消去することにより、分散の式

$$\nu^2=c^2\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{m_0c^2}{h^2}\right) \tag{7-11}$$

を得る。 (7-8) と (7-10) は、粒子が (E, p) なるエネルギーと運動量をもって走っているとき、これに伴う位相波の振動数と波長を与える関係であり、両式は合して相対論的共変な関係を表わしている。

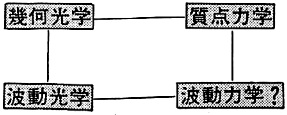
ドブロイの得た (7-8) (7-10) は、アインシュタインの (7-1)、(7-2) と同じ関係である。(そして (7-11) は $m_0\to 0$ では光波の場合の (7-3) に帰着する。) しかしアインシュタインの場合、この関係を光以外にもおし及ぼそうなどとは、まったく考えていなかった。電子は光量子などに比すればずっと立派な粒子のように思われてきた。電子というような荷電や質量をもつ粒子に波動性をあてがうということは、なんとなく考えにくいことであった。アインシュタインの場合、彼の光量子説がいかに大胆なものとはいえ、とにかく一時代前にニュートン流の粒子説があったのに対し、物質の波動論についてはそういう前歴はまったく見当たらないのである。さらにアインシュタインの場合、その光量子には光電効果その他の実験的証拠が二、三あったのに対し、ドブロイの随伴波には直接的な実験的証拠は当時何もなかった。

要するに、結果としてドブロイは、すべての物質粒子の運動には (7-

8)、(7-10) できまる振動数と波長をもつ位相波が伴わねばならないという考えに達した。いいかえれば、粒子－波動の二重性はまさに任意の粒子——それが質量や荷電をもつか否かなどの性質によらず——に妥当すべき量子論の普遍的原理をあらわしており、すべての粒子について粒子性と波動性はつねに同じ普遍常数 h を通じて (7-8)、(7-10) 式でつながれるということである。

この量子論の一般的な原理、そして物質波という普遍的な概念に到達するのに、ドブロイのたどった上述のような推論はあとからみれば独得すぎるようにみえるかもしれない。つまり彼は、粒子内周期現象の振動というような描像を媒介にして推論したが、こうして達した (7-8)、(7-10) の関係においては、この粒子の体内の振動数 $\bar{\nu}$ は消去されている。しかしながら、物質粒子に波を随伴させるという考えは、超光速の位相速度とか、波束の拡散（これはあとになって明らかになることであるが）のような、かなり奇妙な効果を含意するだけにデリケートなものなのであり、はじめてこのアイディアに達した人が上述のような迂回した独得なルートをとることを要したことはうなずけることである。

ドブロイはまた、光学と力学とのアナロジーを追求し、フェルマの原理とモーペルチュイの原理（どちらも古めかしいものだが）の対応にもとづいて、幾何光学と古典力学を対応させ、彼の想定する“新しい力学”は古典力学に対してちょうど波動光学が幾何光学に対するのと同様の関係にあるとのべ、この立場からも質点の運動はつねに波の伝播を伴っているという原理と、上述の同じ関係 (7-8)、(7-10) とに達した。古いフェルマの原理とモーペルチュイの原理とのアナロジーによった点でドブロイはフランスの伝統をうけついだが、このアナロジーはさらに前述のハミルトンのそれへとおし進めることによって、「波動力学」の建設にいっそう有用なものとなるだろう。



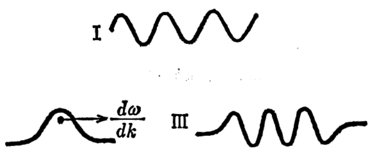
物質粒子ではEとpの関係は、光量子の場合の $\varepsilon=cp$ のかわりに

$$E^2=c^2(p^2+m_0{}^2c^2) \tag{7-12}$$

であり、これが (7-8)、(7-10) によって ν と λ の間の関係としての (7-11) に読みかえられている。すなわち

$$\omega^2=c^2\left(k^2+\frac{m_0{}^2c^2}{\hbar^2}\right) \tag{7-13}$$

こうして ω がもはや k に比例しないために位相速度 $u=\omega/k$ は一定にならず、自由空間においてすでに波の分散がおこる。ところで一般に波数の（したがって振動数も）少しずつちがった波を重ねると、空間のある領域に局所化して動いていく波（いわゆる波束）をつくることができ、この波束の中心は$\dfrac{d\omega}{dk}$なる速度で移動していく（これを「群速度」という）ことがレーリー以来知られている。ドブロイの波では、この速



Iのような平面波をたくさん（波長の少しずつちがったものを）重ね合わせると、IIあるいはIIIのような波束をつくることができる。

度は分散のために位相速度と異なり、(7-8)、(7-10) により

$$\frac{d\omega}{dk}=\frac{dE}{dp}=v\left(=\frac{c^2p}{E}\right) \tag{7-14}$$

となる。こうして波の中心の速度が粒子としての速度vに一致する。このもっともな結果が得られるということは、(7-8)、(7-10) の関係で波を伴わせるとしたことの妥当さの一つの重要な根拠になる。[8]

さてエネルギーEなる粒子に (7-8) 式できまる ν の単色の波を伴わせている限りでは粒子波動並行論が成り立つものとして考えることができるだろうが、いったんわれわれが波を考えると、これは1個の古典的

な粒子の運動状態よりもはるかに広い状態の自由度とフレキシビリティをもっており、波については波束のようにいろいろの平面波の重なった状態が考えられる。(9) ドブロイがやったように、これを1個の粒子に連合させれば粒子波動並行論はのりこえられることになる。ことにいまの場合、波は分散するようなものであり、このために波束は——その中心は群速度で動くが——その形が次第にくずれ拡がってゆくことになるだろう(「波束の拡散」という)。古典的な1個の粒子の運動にはこれに対応する性質はありえない。粒子の運動と波の運動を連合させるには、ドブロイの出発点となった位相を合わせるということのほかに、いろんな問題が発生することになる。

ところでドブロイの場合、相対論によって導かれたことが本質的であった。そして粒子-波動の二重性を示すドブロイの関係は、"相対論的波動方程式"——クライン-ゴルドン(Klein-Gordon)方程式とよばれる後出のスカラー方程式(7-21)のみならず、ディラック方程式その他、任意のきまった質量とスピンをもつすべての(自由粒子の)相対論的波動方程式——の基礎をなし、したがって"波動場の量子論"なるものの一般的基礎となるものである。このことはあとになって次第にはっきりしてくるのである(第14章参照)。

しかも他面において、ドブロイが粒子-波動二重性を光から質量をもつ物質粒子へと一挙におし拡げたおかげで、この二重性を**非相対論的近似**で考えることが可能になったということが量子力学の形成に重大な意味をもつことになる。〔その場合、(7-12)、(7-13)式はそれぞれ(Eと

---

(8) もし逆に、粒子には(7-8)の関係できまる振動数の波が伴っていることを認めるならば、その波の群速度は粒子の速度に等しかるべしという対応論的要求からして、粒子としての運動量$\vec{p}$と波の波数$\vec{k}$との間の(7-10)式の関係を導き出すことができる。同様に、(7-10)式と[(7-12)+(7-14)]とから(7-8)式が出せる。

(9) もし波束を(7-8)、(7-10)式によって粒子の言葉に直訳すれば、"いろんな E、$\vec{p}$ の状態を重ね合わせた状態"なるものを考えるべきことになる。この言葉をどう理解すべきかはのちに次第に明らかになろう。

ωの原点をずらして)、

$$E=\frac{p^2}{2m_0},\qquad \omega=\frac{\hbar}{2m_0}\ \vec{k}^2 \tag{7-15}$$

となり、(7-14) の関係はいぜん成り立ち、

$$\frac{d\omega}{dk}=v=\frac{p}{m_0}$$

という形になる。位相速度は$u=\frac{v}{2}$となる。(7-10) はいぜん成り立つが、$\lambda=h/(m_0v)$ としてよい。〕つまり、そのことがシュレーディンガーにおいて非相対論的波動力学の成功に導くための前提となったのである。そして、この非相対論的波動力学において、やがて確率解釈の樹立や、二重性のディレンマの解決がまず可能となるのである。

ドブロイの理論はすべて物質粒子の移動にはドブロイ波の伝播が伴うというが、そういう波はこれまでまったく実験的に知られていない。それは (7-10) からわかるように、物体が十分軽くないかぎり、波長が非常に短くて波動性が目立たないということからおそらく納得されるだろう。ドブロイは、電子のような軽いものについては回折が観測にかかるだろうと示唆した。のみならず、彼は進行波だけでなく定在波も考え、原子内電子がとびとびの量子状態をもつという事実を、まさに電子のそのような波動性の現われと解した。

物理現象において、整数が現われてくる場合として固有振動の現象があることはよく知られている。したがって、定常状態が量子数で指定されるということも、なんらかの固有振動にもとづくものとして自然に理解できるのではないだろうか。われわれは前に原子の線スペクトルを同様の考えで(古典的な粒子系の基準振動として)理解しようとする試みが失敗に終わったことをみた(§4·1参照)。そのさいの考え方と異なる点は、第一に、こんどは粒子系の固有振動ではなく連続的な波の固有振動——すなわち定常波——を考えることである。さらに第二に、各固有振動は定常状態に対応するが、その振動数 ω_n がそのまま光の振動数として現われるのではなくて、二つの固有振動数の差

$$\omega_{nn'}=\omega_n-\omega_{n'} \tag{7-16}$$

が光の振動数として現われるのだとすることである。それは各固有振動に対して（7-8）式の関係によってエネルギー準位 E_n がきまり、このような二つの準位間の遷移に関するボーアの振動数条件に従ってスペクトル線の振動数がきまるとすることに同等である。しかし、スペクトル振動数が（7-16）できまるということは、発光の因として考えられた遷移もまたなんらか連続的な過程として考えうるのではないかということを示唆する。実際ドブロイは、（7-16）はうなりの振動数であり、リッツの結合則はこのようなメカニズムに由来すると想像する。

さてボーアの定常状態は電子に伴う波の定常波の状態であるという考えを具体化するには、力の場を運動する粒子に伴う波をあつかわねばならぬが、これに対しても彼は同じ（7-8）、（7-10）の関係を仮定した。すなわち電子が $V(x)$ なる位置エネルギーで表わされる力の場のなかを運動する場合、（非相対論的）質点力学ではエネルギーの式

$$H(x, p)=p^2/2m_0+V(x)=\text{一定}\equiv E \tag{7-17}$$

が成り立つ。すなわち、この場合も古典的な粒子運動の（全）エネルギーは一定であるが、このような一定エネルギーの状態にはやはり（7-8）できまる振動数の単色波が伴うと考える。これは非常に重要なステップである。なぜなら、それは、ドブロイの関係（7-8）は原子のような複合粒子にも当てはまる普遍的な関係であるとみることを含意することになるから。アインシュタインにおいて（7-1）は、1個の光量子に当てはまる関係にすぎなかったが、ドブロイの（7-8）は、はるかに一般的にとらえられているわけであり、そのようなものとしての（7-8）がやがてシュレーディンガー理論のもとになるのである。（7-8）の ν はまさに"ドブロイ振動数"とよぶべき新しい概念なのである。

さらに、このような状態で粒子が古典力学的な運動をするとすれば、各場所で（7-17）式できまる運動量、すなわち

$$p(x)=\sqrt{2m_0(E-V(x))} \tag{7-18}$$

をもつはずであるが、ドブロイはこの $p(x)$ と、これに伴う波の同じ場

所での波数ベクトル $\vec{k}(x)$、あるいは波長[10] $\lambda\!\!\!-(x)$ との間の関係として (7-10) が成立すると考える。すなわち

$$\lambda\!\!\!-(x)=\hbar/p(x)=\hbar/\sqrt{2\,m_0(E-V(x))} \qquad (7\text{–}19)$$

あるいは

$$\frac{\hbar^2\vec{k}(x)^2}{2\,m_0}+V(x)=\hbar\omega$$

こうして力の働く場合には、場所ごとに変わる波長をもった波を考えることになる。このような場所ごとに値が変わる $\lambda(x)$ が波長として



場所ごとに波長が連続的に変わる波

の意味をもつためには、x が $\Delta x\sim\lambda$ の程度変わったとき、$\lambda(x)$ したがって $V(x)$ の変化がゆるやかであると仮定せねばならない。これは媒質の屈折率が場所的に波長程度のへだたりでゆるやかに変化するなかを光が通過する場合、すなわち幾何光学的近似が当てはまる場合に相当している。なお、いまの場合も、やはり波束の中心の速度が粒子の古典運動の速度と一致するであろうか。この点はもう少しくわしく吟味する必要がある[11]。しかし、定常状態ではわれわれは単色波だけを考えればよいとみられるから、この問題はあとまわしにする。

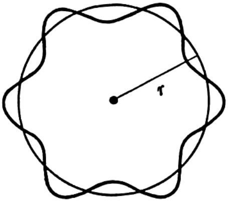
実際 (7-19) 式を用いてボーア理論における量子条件を“導き出す”ことができることを示そう。ボーア粒子の周期的な軌道運動があるとき、これに伴う波が定常波をつくるためには、波がこの軌道に沿って一循したとき位相がうまくつながらねばならない。でないと、波は干渉によって消えてしまうだろう（ドブロイはこれを「共鳴の原理」とよぶ)。つまり

$$\oint dx/\lambda=n \ (\text{整数}) \qquad (7\text{–}20)$$

---

(10) 普通の波長 λ の $\frac{1}{2\pi}$ を $\lambda\!\!\!-$ と書いて用いる。

(11) これはシュレーディンガー理論で保証される。



ボーアが最初に考えた水素原子内の等速円軌動を描く電子を考えると、これに伴う波は円周に沿う波長一定の波となる。位相がうまくつながると定常波ができるが、そうでないと干渉の結果、波は打ち消されてしまう。定常波ができるためには、$2\pi r/\lambda=n$、$rp=n\hbar$ となり、ボーアの量子条件と一致する。

を要する。ところが、これは (7–19) により、ゾンマーフェルトの量子条件にほかならない。あるいは、むしろ、より一般にはアインシュタインの量子条件 $\sum_k \oint p_k dq_k = nh$ を意味する。(もっとも多自由度の場合には、量子条件に対するこのような解釈がどこまで成り立つかはまだ十分明らかではない。)

これは粒子－波動の二重性を表現する普遍的な関係 (7–8)、(7–10) こそが量子論の根本原理とみなされるべきことを再びデモンストレートしたものといえる。[12]

2年後にハイゼンベルクが提出するその新理論は、ボーアの原子内電子の軌道運動を否定するのであるが、ドブロイがいまやったことは、むしろ原子内電子の軌道運動を定常波でおきかえることである。そのことによって、不連続的な準位の存在を連続的な波の時空的ふるまいによって基礎づけた。この立場では、原子内電子の軌道が云々できないのは電子が波だからだということになる。そして原子の外では、幾何光学的近似が成り立つ限度で軌道が云々できるのだということになる。ドブロイの理論は、自由な電子の運動にも原子内に束縛された電子の運動にも波をあてがうことによって、両方の運動を統一的にあつかう道をひらいた

(12) ただし、次の点を注意しておく。ドブロイの理論は、ボーアの理論における h の二重の意味を、粒子性と波動性を媒介するものとしてのアインシュタイン的な h に統一するという利点をもつようにみえる。しかし、じつは逆に、光に対する $E=\hbar\omega$ の関係を量子条件の結果として導くこともできるし (デバイ、1910)、これは電子についても同様である (§ 8・4 参照)。したがって、ボーア理論における h の二重の意味というものは量子条件を規定するものとしてのプランク的 (ないしはハイゼンベルク的) h に統一することもできたのであった。

ものといえる。それはボーア－ゾンマーフェルト理論にあって、周期的運動だけが量子化されるという量子についての狭い考え方を打破し、プランク常数hの存在は電子の波動性として電子のすべての運動を規制するということを認識せしめるものだったのである。同時に不連続的な量子の背後に連続性の面をみることによって、'量子' についてまったく新しい記述の道をひらくものだった。

量子力学の形成史において、プランクの量子とドブロイの物質波の二つが本質的に新しい出発点のアイディアを代表しているといってよい。第5章でのべたように、あたかもそのころ前期量子論は多彩な発展をとげつつあり、量子力学の結果に一致するものをたくさん先取りしつつあった。とはいえ、依然としてそこに欠けている最大のものは物質の波動性の側面であり、まさにこれをドブロイがいったのである。この大胆なアイディアは当時のもっとオーソドックスで批判的傾向の人々が単に思いつかなかったことなのである。ドブロイ自身、みずからの着想が物理をやがてみるほどにも根本的に変革するようなものと予見していたわけではなかった。しかし大きな発見というものは、本人が予想もしていなかった、かつまた本人の考え方をものりこえてしまうような重大事に発展するもののことだ、という逆説的な言い方が許されるならば、プランクやドブロイのケースは、まさにそのような大きな発見の例だということになる。

他面、ドブロイの仕事は電子の波動性についての基本的関係と多くの正しいヒントを与えたが、体系的な理論を具体化しなかった点で、アインシュタインの光量子の仕事（1905—17年にわたる）に比せられるであろう。

ドブロイは、まず波の位相に注目し、振動数と波数を中心にして議論をすすめているが、波動モデルの全パワーを発揮させるには位相とともに振幅をあらわに入れて——つまり「波動関数」を導入して——、それの従うべき波動方程式をたてる必要がある。それがドブロイのいう“新しい力学”、“物質粒子に対する真の理論”なるものの基礎方程式を与え

るはずである。じつは、これまでの彼の議論のなかには波動方程式を見つけだすための鍵の大部分が（波動方程式が時間 t について1階であるべしということのほかは）すでに含まれているのである。とはいっても、これにもとづいて実際に波動方程式を見出すということは機械的な仕事ではない。

ドブロイ理論の具体化のためにもう一つ必要なことは、波の正体が何かを明らかにすることである。この点に関してドブロイは、粒子と波は共存し、1個の粒子の運動がこれとシンクロナイズしつつ随伴するところの波を介してきまるというような描像をとっており、光量子にもこの見方を適用する。これは物質粒子ないし光の粒子－波動二重性に対する一つの見方であるが、この線で首尾一貫した解釈ができるかどうかはあやしい。ドブロイは波動方程式を書き下すということになかなかとりかからなかったが、その一つのわけは、彼がこのように粒子－波動を共存させるというモチーフに重点をおきすぎたためと考えられる。波動方程式を見出すには、むしろまず波動一元論的な見方にわりきって進むほうがよかったであろう。

とはいえ、少なくとも自由な場合について波動方程式を形式的に書き下してみることはむつかしくなかったはずである。ドブロイは分散の式(7-11) を知っている。すると、任意の平面波

$$\phi = A\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{\vec{n}\,\vec{x}}{\lambda} + \delta\right)$$

——またそこで $\frac{\vec{n}}{\lambda}$ をいろいろ変えたものの重畳でできる波束——のみたすべき波動方程式として、直ちに相対論的なスカラー場の方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0 \qquad (7\text{-}21)$$

を得る[(13)]。この式は、しかし1926年までは舞台に登場しなかった。

他方、力の働く場合については、非相対論的な立場でドブロイは定常波を考え、(7-19)、(7-20) の関係を得たことをすでにみた。そこで、これらの式の背後にある波動方程式を発見することが問題となるが、その

ためには一つの飛躍を必要とする。その事情をみるために、前述のドブロイの定常波の理論の性格を再考しておこう。

このドブロイの定常波の理論は、力のある場合に (7-19) 式をそのまま採用し、単に軌道運動に即した波を考えた結果として、ボーアの量子条件をそのままの形で再現したことからもわかるように、ボーアの理論と同じ段階の理論と見るべきものである。ボーアの量子条件が十分精密なものでなかったのと同様、力のある場合のドブロイの定常波の理論も精密なものでない。これに対して $E=\hbar\omega$ の関係は、力のある場合にも定常状態について精確な式であった。結局、ドブロイの理論の定常状態の問題に関する部分は、それを固定して考えるならば、ボーアの理論と次のような対応関係

$$E=\hbar\omega\longleftrightarrow E_n-E_{n'}=\hbar\omega_{nn'}$$

$$p(x)=h/\lambda(x)\longleftrightarrow\oint p\,dx=nh$$

にあるものであった。

したがって定常波の波動力学を得るには、ドブロイの理論を $V(x)$ の変化のゆるやかなところで、それに漸近的に一致するような波動論に改変せねばならない。この必要はドブロイも意識していたところであるが、これを具体化することは後からみるほど容易ではなく、シュレーディンガーのためにリザーブされることになる。それは実際上ボーア理論がハイゼンベルク理論に改変されることに相当するような大きな一歩である。

§7·2 新しい統計、その他

ドブロイの仕事は、当時の量子論に新風を吹きこみ、遠大な視野をひらくはずのものであったが、容易には受け入れられなかった。それが当時の量子論のセンターから離れたところで出されたということもあるが、[14]

(13) 初期には、人々（シュレーディンガー、パウリら）は波動方程式を見出すのにこのような簡単な方法はとっていない。それにしてもドブロイの仕事を早くみとめたアインシュタインが (7-21) を書き下さなかったのはいささか不思議である。

それにもまして障害となったことは、その内容が珍奇であり、当時の量子論の主流の考え方とあまりにもちがったものだったことにある。その推論の仕方も変わっており、なんのことかよくわからず、それは当時一般にまゆつばものとみえた。(15) このような事情が波動力学の建設をおくらせる一つの原因になった。

それまでの量子論の展開で、プランクの量子、アインシュタインの光量子、ボーアの遷移などはすべて新奇ではあったが、実験と密接な関係をもって導入された。それに対してドブロイの物質波なるものは、当時までに観測面での証拠がほとんどなかった。そういう怪しげな観念の産物で量子条件を"説明した"などと称しても、どれだけの「物理的意味」があるのか、というのが多数派の印象だったと思われる。量子論の場合に限らないのだが、物理の歴史ではプランクの量子やドブロイの物質波のように当初多くの人にフィクションに類するとみえたことが本物になったりすることがあって油断ができない。

ドブロイの論文はファンタジーのようにみえるが、にもかかわらず、それが重大な物理を含んでいることをまず察知したのは、この仕事についてランジュヴァンから知らされていたアインシュタインであった。

ところがアインシュタインは、またちょうど同じころ、インドのボースから原稿を受け取っていた。それは、光について純粋な粒子論の立場にたって熱輻射の分布式を導く問題に関するものである。アインシュタインが最初に光量子説を出したとき、それはヴィーンの分布式に対応していることを示したわけであるが、いまボースは光量子が個別性をもたず、したがってそれが1粒子位相空間の h^3 の大きさの細胞に分布する

(14) ドブロイは同じ仕事を英文で *Nature* 誌 (1923) や *Phil. Mag.* (1924) にも書いており、人の目には広くふれている。(彼は以後は英語で書くことはほとんどなくなるが。)

(15) 一般に非常に新しいアイディアを出すと '変物' (crank) とみられる危険があり、また事実、変物と本物とは仕事の出された当座ではまぎらわしい。おまけに、大家といえども、なにかの拍子に変物に類することを発表する可能性がないわけでもない。

仕方だけにもとづいて状態を数えるべきだと仮定するならば、プランクの分布式に導くということを示した。この考えは必ずしも新しいものではなかったのだが、不可識別な粒子の統計を明瞭にのべることによって新たな関心をよぶことになった。

もともと熱輻射と理想気体とのアナロジーの考えで出発したアインシュタインは、直ちにボースの新しい統計性の意義を認め、これを質量をもった単原子理想気体の場合に拡張し、マックスウェル-ボルツマンの分布式とはちがった分布式を得た。この場合、分布式はプランクの式を拡張した

$$f=\frac{1}{e^{(E-\zeta)/kT}-1}$$

となる。(プランクの式は、ここで化学ポテンシャル ζ が0の場合に相当し、光量子の数が保存しないことを反映する。)

理想気体にもネルンストの熱定理が当てはまるべきものとするならば、マックスウェル分布式は低温で正しいものではありえないが、アインシュタインの理論によってこの困難が除かれることになる。彼はさらに、この場合、低温で一種の"縮退"(1粒子基底状態への凝縮)がおきることも指摘した。[(16)]

ところで、このようなボース気体のもつゆらぎは、熱輻射の場合と同様、独立な粒子の集まりに相当する項と波の干渉のゆらぎに相当する項との和となるが、このことからアインシュタインは理想気体のような物質粒子の系にも波動が伴うと考えるに至り、ドブロイが実際そのような波動場を考えたことに言及した(1924年12月)。このことが機縁となって、ドブロイの仕事の反応がぼつぼつ現われるようになる。シュレーディンガーも、最初ドブロイの仕事をバカにしていたようであるが、このアインシュタインの仕事を通じてそれに関心をもつに至った。

ボースの理論は光量子の集団のもつ、きわめて重要な性質をのべたも

---

(16) これはのちになって液体ヘリウムIIの問題に応用されることになる(ロンドン F. London、1938)。

のであり、光の粒子性と波動性を統一するための基礎の一つを与えたことを意味している。[17] 同じプランクの分布式を出すボースの方法と、前にのべたデバイの方法とを比較すれば、ボース統計に従う粒子の集まりの量子論と波動場の固有振動の量子化との間の、なんらかの同等性が示唆される。シュレーディンガーは、もし原子がドブロイ－アインシュタイン流の波動場で表わされるならば、その固有振動の量子化の結果として、アインシュタインのボース気体の理論と同じ結果が得られることを注意した（1925年12月）。[18]

こうしてドブロイの物質の波動論の応用は、まず統計熱理論の領域ではじまったことになる。とにかくアインシュタインの影響力により、ドブロイの仕事に対する関心がチューリッヒやまたゲッチンゲンでおきはじめた。一方コペンハーゲンでは、光量子に批判的であったボーアの影響により、そういう関心は容易にはおきなかった。それでもようやくクライン O. Klein がドブロイの物質の波動論に接近しはじめていた。

さて、電子がドブロイのいうような波動性をもつならば、原子の外においても、光の場合と同様の仕方で干渉や回折を示すことが期待される。それがこれまで観察されなかったのは、一つは電子に伴う波の波長がきわめて短いためと考えられる。電子線の波長は（7–10）できまるが、これは非相対論的には

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0E}} \qquad (7\text{–}22)$$

---

(17) §4・3 にのべたアインシュタインによるプランクの分布式の導出も、光量子のボース統計性の考えと内面的関連があることを注意しておこう。その導出のさいに、もし自発放出だけを考えたとしたらヴィーンの分布式になった。しかし光量子はボース粒子であるために、その放出の確率が場にすでにある光量子により強められる（誘導放出）結果、プランクの分布式になったわけである。そして、このことがら（誘導放出）は、光の波動性と関係があり、ローレンツの古典論によれば光波の存在は原子の光の放出を誘起することに対応する。

(18) なおシュレーディンガーはこの論文で、容積 V の箱のなかに入っている粒子には最大 $\sqrt[3]{V}$ 程度の波長の波が伴うので、粒子は最小 $h/\sqrt[3]{V}$ の程度の運動量をもち、静止していることはできないこと（ゼロ点振動！）を指摘している。

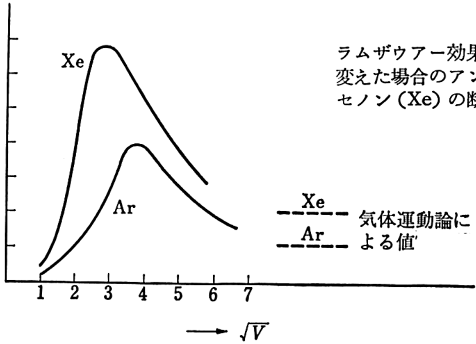
それゆえ

$$\text{Å で測った波長} = \sqrt{\frac{150}{V}} \quad \left(\begin{array}{l}V\text{は電子のエネルギーをボルト}\\\text{単位の加速電圧で表わしたもの}\end{array}\right) \qquad (7\text{-}23)$$

であって、電圧によって直接に波長が変わる！ (7-23) からして、普通の仕方でつくられる電子線は、X線ないしそれ以下の程度の波長になることがわかる。

ドブロイの物質波をシリアスにうけとめ、その証拠を直接実験事実のなかに見出そうとしたのは、ゲッチンゲンのフランクの学生エルザッサー (21歳) が最初だった。こうして彼は、電子の波動性が現われていると解釈できるような実験事実がすでにあることを指摘した。

その一つはラムザウアー C. Ramsauer (1923) またタウンゼンド J. S. Townsend の見出した効果である。遅い電子の流れがアルゴンのような気体原子に衝突して弾性散乱される場合、散乱のまとは球対称的



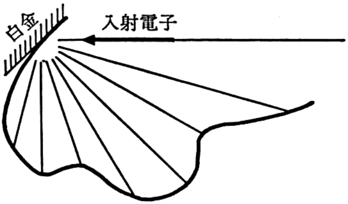
ラムザウアー効果。電子の速度を変えた場合のアンゴン (Ar) とキセノン (Xe) の断面積の変わり方。

な中性原子で、これは弾性散乱に対しては一定の力の場のようにふるまうであろう。電子が点的な粒子だとすれば、その散乱の断面積はこの力の場の形によってきまるであろう。この断面積は一定ではないだろうが、入射電子の速度によって、それほど著しく変わることはなく、気体運動論で得られている断面積 (すなわち原子対原子の衝突に対する断面積) に近いものであろう。ところが、実験によれば電子が非常に低速になってゆくと、断面積が異常な変化を示し、極大をすぎてから著しく減少す

るのが見られるのである。

電子が波として散乱されるのだとすれば、十分低速になっていくと波長が (7–22) 式によって増して、原子の径に比してはるかに長くなり、波はほとんど散乱されることなしに原子をのり越えてゆくであろうから、このような効果がおきることは定性的に理解されることになる。

第二の現象は、白金板に電子線をあてて、散乱強度の角度分布をしらべたダヴィソン C. J. Davisson とクンスマン C. H. Kunsman の実験 (1923) である。結果は、図に見るように角度分布に凹凸が現われる。



白金板に135° の角で750ボルトの電子線をあてたときの散乱線の強度の角度分布(ダヴィソンとクンスマン)。

エルザッサーは、これはX線の場合と同じように電子が波として結晶の各原子で散乱されて干渉するためとした。

エルザッサーの論文が発表されたのはちょうどハイゼンベルクの新理論と同じころのことであった。彼の解釈はあまりまだ説得力をもたなかった。

なお前記のボース気体に対するアインシュタインの理論とちょうど同じころに、パウリの排他律の仕事が出ているが、それから1年あまりのちになって、両者からヒントを得たフェルミの理論が出る (1926年3月)。彼は、単原子理想気体について原子が互いに不可識別であるが、それがアインシュタインの場合とはちがってパウリの排他律に従うようなもう一つの可能性があると考えた。この場合は、1粒子位相空間の h^3 の細胞に高々1個の原子が入ることになり、その結果として新しい第三の分

(19) 同じ問題を波動力学にもとづいてあつかうことは、やがてディラックによってなされ、フェルミ分布の電子系への適用はパウリにはじまることになる。これらについては後にふれる。

布式と状態方程式が導かれる。そして再び低温でのネルンストの熱定理との矛盾がのぞかれることになる。

フェルミの得た分布式は

$$f=\frac{1}{e^{(E-\zeta)/kT}+1}$$

であって、これが、前述のアインシュタインの分布式と比較して、分母の1の前の符号をかえただけの差であるということは意外な簡単さであるが、"ボース粒子"に関する式と"フェルミ粒子"に関する式の間のこのような簡潔な差異は、のちにくりかえし現われることになる（第12・13章参照）。

アインシュタインがボースの統計を光量子から原子に移したように、フェルミはパウリ原理を電子から原子に移して考えたわけである。そしてスピンとの関連などはまだ考えられていない。またアインシュタインの場合は、その新しい統計を物質の波動性に結びつけたわけであったが、フェルミは純粋に前期量子論の枠内で考えている[19]。当時ちょうどシュレーディンガー理論が出はじめていたわけであるが、フェルミはまだ物質波に関心をもっていなかった。

第8章　波動力学の建設

§8・1　定常状態のシュレーディンガー方程式

量子論の歴史において新しいアイディアの創始者とその発展者とがくりかえし対となって登場してくる。はじめて量子仮設を出したプランクに対し、これを光量子に読みかえたのみならずいろんな物理的問題へおし及ぼしたアインシュタイン、原子の安定性とスペクトルを定常状態と遷移の観念でとらえたボーアに対し、これを形式的にも実際面でも発展させたゾンマーフェルト、そしてハイゼンベルクの新理論に対しては、それを非可換代数としてとらえ形式的に展開したボルン－ヨルダンとディラックという工合である。ドブロイの物質波のアイディアについては、やがてシュレーディンガーがこれを組織して「波動力学」を建設することになる。一般的にいって、非常に新しいことを考えた最初の人間は、そのアイディアが真理をさぐりあてたという意味でまったく自然なものとして自信をもつと同時に、それがいままでにない、したがってなにかしら奇妙なものであるだけに、かつまた新しい考えが最初から論理的に完全な形で出てくるわけでない以上、当然多かれ少なかれ人からたたかれそうな弱点を内包しているだけに、それに対して危惧をおぼえる。とにかく彼はその理論をさらにおし進めることに対する心理的抑制をもつ。それに対し二番目の人間は、もう少し超然としたまた批判的な気持で問題を新しい角度から見直すことができ、これを展開するうえでその創始者にたちまさるということがおきるわけである。

さて、ドブロイの仕事も少しずつ問題にはなってきたが、同じころ第5章にみたように、前期量子論に多彩な発展がおきており、さらにハイゼンベルクの新理論が出るに及んで、人々の関心はこれに向かった。ド

ブロイの考えを追求して波動力学を定式化する仕事に取り組んでいたのは、シュレーディンガーのほかに多くはいなかった。当時、行列力学によって原子内の現象が時空の枠内で思考されうるか否かにすら疑念がもたれていたのであるが、相対論に関心の強かったシュレーディンガーはその時空記述の可能性を強く信じ、そのことが支えとなった。

彼の当面の目標は、ドブロイ流の波動論によって水素原子の問題を解いて正しい準位が得られるかどうかをためすことであった。まだ電子回折などが実験的によくわかっていなかった当時にあって、水素原子の問題が試金石となったのは自然なことである。彼は、はじめドブロイに従って問題を相対論的にあつかったわけであるが、期待された結果（つまりゾンマーフェルトの微細構造の式）は出なかった。しかし、やがて問題を非相対論的にあつかうことに考えをきりかえたことが重要なきめ手となった。こうして実際と合う結果（つまりバルマー項）を得て、波動力学のとっかかりをつかむことができた。のみならず非相対論の立場をとったことによって、やがて波動力学の展開とともに、その多体問題への拡張や確率解釈の確立が可能となり、量子力学の一般原理を抽出する道がひらかれることになるのである。（これはおってみることになる。）

シュレーディンガーは1926年前半の間に、「固有値問題としての量子化」と題する四部作と、ほかにもう一つ、計5篇の重要論文をたてつづけに書いたが、それぞれが「波動力学」建設の重要な階梯を含み、その全体によって波動力学の基本を事実上単独で書き上げることになった。[1]それは1925年後半の期間にハイゼンベルクとボルン－ヨルダンが「行列力学」を建設した事業に匹敵するもので、まさに横綱相撲の感がある。

1926年1月に提出されたその第一論文は、ドブロイの着想とは独立な進み方をとる。[2]それはむしろ前期量子論において、多重周期運動に対し

---

(1)　シュレーディンガーはドブロイよりも5歳年長で当時38歳、数学技術の面などでより円熟していた。

(2)　もっとも論文の終わりのほうで種あかしをし、ドブロイの論文に触発されたことを認めている。

てハミルトン－ヤコービ形式で量子条件を入れるシュヴァルツシルト－エプシュタインの定式化を下敷きにして、次のように進む。

ハミルトン－ヤコービ方程式

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=T\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)+V(q)=E \tag{8-1}$$

から出発し、Sがそれぞれの座標 q_r だけの関数の和として変数分離する場合を問題にする。そのような解は、Sのかわりに(3)

$$S=K\log\psi \qquad \text{すなわち}\ \psi=e^{S/K} \tag{8-2}$$

なるψを用いるならば、ψがそれぞれの座標の関数の積に因数分解するはずである。そして (8-1) は

$$H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-E=0 \tag{8-3}$$

と表わされる。量子論への移行は、シュヴァルツシルトらのように量子条件を課すことによってではなく、(8-3) を

$$\delta\int dq\left[H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-E\right]\psi^2=0 \tag{8-4}$$

なる変分法則で置き換えることによってなされるという新しい仮設を導入する。この仮設はかなり天下り的な飛躍である。非相対論的な1個の粒子が $V(x)$ なるポテンシャル場を運動している場合についていうならば、この置き換えは

$$(\nabla\psi)^2-\frac{2m}{K^2}(E-V)\psi^2=0$$

なる形に表わしたハミルトン－ヤコービ方程式を、新しい方程式

$$\Delta\psi+\frac{2m}{K^2}(E-V)\psi=0 \tag{8-5}$$

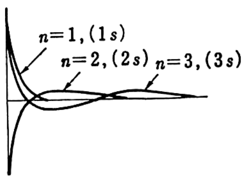
---

(3) のちにもっと普通になったおき方は $\psi=e^{iS/\hbar}$ であるが、シュレーディンガーはまだこの段階では ψ を実数と考えているので (8-2) のようにおく ((8-7) 参照)。

に置き換えることを意味する（後者は(8-4)に対するオイラー方程式である)。(8-5) は（$K=\hbar$ と同定することにより)「時間によらぬシュレーディンガー方程式」とよばれるものにほかならない。それが、古典論の $e^{S/\hbar}$ なる量に対応するようなあるスカラー場に対する方程式として得られたわけである。

上のシュレーディンガーの推論で特徴的なことは、ウィーン出でボルツマンに傾倒していた彼が、エントロピーに対する確率のアナロジーでハミルトン－ヤコービ関数に対する ψ を導入しているようにみえることである。そのことは、(8-2) がボルツマンの $S=k\log W$ と記号まで含めて似ていること、また S の可算性が W の可積性を意味するという統計力学のよく知られた関係に対応することを (8-2) の導入においてのべていることからうかがわれる(4)。そして、そのうえで (8-3) を変分法則で置き換えることを通じて、ψ に対する方程式を線型化し、波動方程式への移行を達成していることも特徴的である(5)。実際 S が適当な座標を用いて変数分離する場合、対応する (8-5) の解 ψ は同じ変数を用いて積に因数分解することがわかる。

彼はそこで水素原子、すなわち $V=-e^2/r$ の場合について、(8-5) を ψ の1価有限性という自然な条件のもとで解くことによって、無限遠にまで拡がらないような解としてとびとびのエネルギー固有値と固有関



水素原子の固有関数のうち、球対称なもの（s 状態という）の動径方向の変化。

(4) だとすると、彼が ψ の「確率解釈」に導かれてもよかったようにみえるが、ψ は確率ではなく確率振幅であったのだ！

(5) シュレーディンガー方程式 $H\psi=E\psi$ が $\delta\int\psi^*H\psi dq=0$ $\left(\int\psi^*\psi dq=1\right)$ なる変分原理と同等なことは今日よく知られているが、いま ψ が実数なことを考慮すると、シュレーディンガーはこの変分原理から出発して (8-5) に達したものとみなしてよい。

数を得た。この場合は $E<0$ であり、固有値と縮退はゾンマーフェルトの結果と一致した。(ただし、この場合も方位量子数として $l=k-1$ が自然に出てくる。) これは波動方程式 (8-5) の正しさを裏書きするものである。ただし、そのおのおのに対する固有解はゾンマーフェルトの楕円軌道とは、はなはだ異なった定常波である。他方 $E>0$ の場合は連続スペクトルになることも彼は示した。実際、水素原子の問題が振動子の場合と異なる特徴の一つは、イオン化がおきうることに相当して連続スペクトルをもつことであるが、この理論はこのような"非周期的"運動の量子論を実現したことが強みである。

シュレーディンガーがこの第一論文で波動方程式 (8-5) を導いたやり方は高踏的であるが、それは彼が最初、実際にそれを見出した方法ではおそらくないと想像される。第二論文 (1926年2月) で彼は、すでにわれわれがみたドブロイのプログラムにそった方法で同じ方程式をひき出しており、このほうが物理的なアイディアははっきりする。(この論文で"波動力学"という言葉もはじめて出てくる。) このゆき方では、一定エネルギーの粒子運動には (7-8) 式できまる振動数と (7-19) 式できまる場所ごとに変わる波長をもつ波が伴うという考えをうまく定式化すればよいのである。

さて、物質粒子の波動方程式を見出すさいに、再び光の理論との対比が有用であるが、そのためにまず光の粒子性を光量子の理論よりひとまわり古いニュートン流の粒子論にもどして考えてみる。ニュートン流の粒子論は幾何光学を説明することのできるものであるが、そのことに相当して幾何光学の法則と質点力学の法則との間に存在するアナロジーはハミルトンが明らかにしている。しかるに幾何光学は、波長程度の隔たりでの屈折率の変化を無視してよいような場合における波動光学の近似として、後者のなかに含まれるようなものである (このことは光学においてよく知られている)。このことに対応して、一般に質点力学に対して、これを同様の意味での近似——波長程度の隔たりでのポテンシャルの変化を無視してよいような場合に対する近似——として含むような「波動力学」を想定することができるはずである。このような対比関係

を通じて、この波動力学の基礎方程式を見出せばよいのだが、このことだけでは、波動力学の極限と考えられた質点力学について

$$p(x)\propto\frac{1}{\lambda(x)}$$

ととるべきことはわかるが、この比例の係数はきまらず、それは一般に E（すなわち ω）の関数であってもよい。この係数がまさに h であることを教えたものが、光量子論から示唆されたところのドブロイの関係にほかならなかったのである。

いま (7–19) のように場所ごとに変わる波長の波というのは、真っ正直に考えれば

$$|\nabla\tilde{S}|=\frac{1}{\lambda}\qquad \text{すなわち}\quad |\nabla\tilde{S}|^2=\frac{1}{\lambda^2}\tag{8–6a}$$

$$\text{ただし}\ \lambda(x)=\hbar/\sqrt{2m(E-V)}=\hbar/\sqrt{2mT}\tag{8–6b}$$

をみたす $\tilde{S}$ を位相とする波

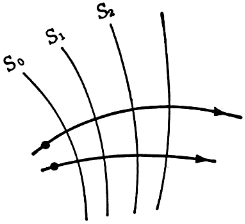
$$\psi=A\sin\tilde{S}\qquad \text{あるいは}\ \psi=Ae^{i\tilde{S}}\tag{8–7}$$

である。ここに振幅 A は必ずしも一定でなくてもよいので、そのとり方に任意性が残るが、$\tilde{S}$ が (8–6) をみたすようにしようとすると、一般に (8–7) の ψ は線型の方程式をみたすように（すなわち「重ね合わせの関係」をみたすように）はできない。

ところで (8–6) は古典力学におけるハミルトン－ヤコービの方程式にほかならないものであって、$\hbar\tilde{S}$ がハミルトン－ヤコービの作用関数になっている。したがって (8–7) 式は古典力学において一つの作用関数から導かれる軌道群の直交表面をそのまま波面とし、作用関数の $1/\hbar$ 倍である $\tilde{S}$ を位相とする波である(6)。このような波を考えるということは、最初の質点力学の立場を忠実に反映するような波を考えることにすぎず、そのような意味での粒子波動並行性に対して h という新しい常数の介入が修正を加えるという意義をもたない。これは幾何光学の立場に対応す

---

(6) 1次元の場合 (8–6) は $S/\hbar=\tilde{S}=\pm\frac{1}{\hbar}\int\sqrt{2m(E-V)}\,dx$ と表わせる。

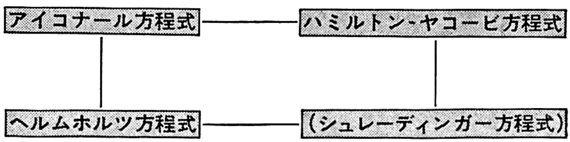


$S_0, S_1, S_2, \cdots\cdots$は $S=$ 一定なる直交表面で、これらを垂直によぎってゆく曲線群が軌道になる。

る。ただ (8–7) 式の ψ に 1 価連続性を要求することから量子条件に相当するものがとり入れられることになり、ボーアとドブロイ（定常波に対する）の段階を意味する。

われわれの求めるのは、このような粒子－波動の並行論ではなくて、粒子性と波動性の否定的統一であるべきである。あるいは少なくとも古典的粒子性に対する否定的契機をもつべきである。すなわち、われわれは、重ね合わせの関係をみたす線型のもので、かつ n の場所的変化がゆるやかなときにこのような幾何光学に漸近するような波動方程式を求める。それはよく知られている波動光学と幾何光学との移行関係を手本にして見出せる。

まず、前のドブロイの図式をより具体的に



と表現しておく。われわれは波動光学のヘルムホルツ方程式 $\Delta u+k^2u=0$ は、幾何光学的近似において不均一媒質（屈折率 n）のなかにおけるアイコナール方程式 $|\nabla W|^2=n^2$ に移行することを知っている。そこで、このプロセスを逆にするならば、ポテンシャル場の質点力学を表わすハミルトン－ヤコービ方程式(これはアイコナール方程式に対応する) (8–6) から、それを“幾何光学的近似”として与えるようなものとして

$$\Delta\phi+\frac{1}{\lambda^2}\phi=0 \qquad (8\text{–}8)$$

を得るが、これは前に得たシュレーディンガー方程式 (8–5) と同じものである。いずれの場合も、波の位相に対する1階2次の方程式が、波自身（すなわち波動関数）に対する2階1次の方程式から近似としてひき出される。

質点力学の法則と幾何光学の法則との類似は、前者に対するハミルトン－ヤコービ方程式（これはハミルトンの正準形式に対する変換理論として導かれるもの）について、とくに明らかである。波動力学の発見は、質点力学のこのような表現が早くから準備されていたことによって、より好便に行ないうることになった。

ドブロイのプログラムにそって定常状態の波動方程式を見つけるのに、次のように進んでもよい。いま非相対論で考えているけれども、ドブロイが指摘したように、古典的な粒子の速度と波の位相速度とを区別することはいぜん本質的に重要であって、いま前者は

$$v=\sqrt{2(E-V)/m}$$

であるのに対して、後者はドブロイの二つの基本的関係 $\omega=E/\hbar$ および (8–6b) の結果として

$$u=\lambda\omega=\frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \qquad (8\text{–}9)$$

である（ゆえに $uv=E/m$)。場所ごとに位相速度が (8–9) で与えられるような波動は、

$$\Delta\phi-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \qquad (8\text{–}10)$$

なる波動方程式に従う。これは

$$\Delta\phi-\frac{2m(E-V)}{E^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \qquad (8\text{–}11)$$

とも書ける。ところが、いま ϕ は一定のドブロイの振動数 $\omega=E/\hbar$ で時間的に単振動する定常波であるから、それは同時に

$$\ddot{\psi}=-\omega^2\psi \tag{8-12}$$

をみたしていることを考慮すると、(8–10) は書きかえられて再び (8–8) を得る。これが実際シュレーディンガーがのべた方法である。ここで注意すべきことは、非相対論的理論ではEは不定の付加常数をもっており、ω や u はこの付加常数によるが $\lambdabar=\hbar/\sqrt{2mT}$はこれによらず、この点でも (8–8) は正当なものと考えられることである。

いずれにせよ〔(8–6)+(8–7)〕なる方程式から出発して、これを (8–8) で置き換えるということになるが、こうして波動方程式 (8–8) が得られたうえでは、これはもはや$\lambdabar$の場所的変化が急激なところでも、また$\lambdabar$が虚数になるところでも成立する厳密で基礎的な波動方程式であるとみなすことが本質的であって、このようなところでは質点力学との平行性はいちじるしく破れる。こうして、ドブロイの定常波の理論（これはボーアの理論と同じ段階にある)、すなわち質点力学の運動に密着した波の考えから出発して、$\lambdabar$の場所的変化がゆるやかなところでこれに漸近するという条件でおさえつつ、これと重ね合わせの原理との間のギャップを止揚することによって、シュレーディンガーの定常波の波動方程式（これはハイゼンベルクの理論と同じ段階にある）が得られたわけである。

ドブロイの理論からシュレーディンガーの理論への発展は、前に見たボーアの理論からハイゼンベルクの理論への発展とよく似た関係にあったといえる。後者が倍音成分に対する計算規則の対応論的書きかえによって遷移成分に対する行列の計算規則に達したごとく、前者はハミルトン－ヤコービ関数Sに対する“計算規則”（1階2次の偏微分方程式）の“対応論的書きかえ”によって波動関数ψに対する“新しい計算規則”（2階1次の偏微分方程式）に達したといってもよい。書きかえによってハイゼンベルクの場合には軌道が捨てられ、シュレーディンガーの場合には軌道群が波に変わった。

そして、結局のところシュレーディンガー方程式 (8–5) は、形式的には単に古典的なハミルトン－ヤコービ方程式において

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{8-13}$$

なる置き換えをしたうえで、全体を ψ に作用させる（オペレートする）というルールで得られるということが見出される（ここで x_i は直交座標とする）。古典力学をハミルトン－ヤコービ形式で考えて出発するのがとくに目的にかなっていたというのは、その S 関数が軌道群に対応するためであった。(7)

さて、このシュレーディンガー方程式を解くという問題は、水素原子についてはすでになされている。シュレーディンガーはさらに他の例をもあつかった。波の正体はまだ明らかでないけれども、再び「数学が突然、物理学者よりも賢明なものとして現われる」。このシュレーディンガーの微分方程式の特徴は、波の１価・連続・有限性というようなごく自然な条件のもとで、束縛状態に相当するような E の領域ではとびとびの E の値に対してのみ解（固有関数）をもち、非束縛状態に相当する E の領域では任意の E の値（連続スペクトル）について解をもつということである。こうしてシュレーディンガー方程式は、粒子運動の描像を波で置き換えることによって量子化を自然にもたらすというドブロイのプログラムを精密に実現する。ことに波の１価性というのは、ドブロイの「共鳴の原理」にほかならない。この量子化は離散的な束縛状態と連続的な非束縛状態とを自働的に包括するという点で、前期量子論における量子化よりも自然であり、精密であり、ほとんどあいまいさがない。しかもこのような固有値方程式を解くという数学的技術はクーラン－ヒルベルト Courant–Hilbert の本（1924）によって、ちょうどタイムリーに提供されている。(8)

シュレーディンガーの理論は、これに先行した行列力学とは非常にち

---

(7) 軌道群に対応するところの S 関数が波動関数に化けるということは、波動関数が確率的意味をもつことに関連性がある。

(8) 波動力学に必要な数学的技術は、ほかにレーリーの波動論によって準備されており、すべて行列力学の場合よりもなじみやすいものであった。

がったスタイルをもっている。行列力学においては、定常状態は明確な描像をあてがわれず、単に n というような量子数で示され、エネルギー(さらに角運動量)の値が付与され、他の力学量については '平均値' が云々できるようなものであった。ところがシュレーディンガーの理論では、定常状態には一定の振動数で単振動する定常波という具体的な描像があてがわれ、ドブロイの関係 $E=\hbar\omega$ は維持されている。ここに出てくるドブロイ振動数 ω はこの波の振動数であって、ボーアの軌道運動の振動数とはもちろん異なる量であり[(9)]、それ自身'スペクトル項' という意味をもっている。このような振動数は、行列力学ではそれ自身としては意味がなくてその差だけが意味をもっていた[(10)]。

シュレーディンガーの理論では、ψ が元来古典論のハミルトン－ヤコービ関数 S に対応する量であったことからして、S と同様 ψ はじつは「配位空間」の量である。1 体問題では配位空間と物理空間は同じであるが、多粒子系ではそうでない。それで多粒子系のシュレーディンガー方程式に話をすすめるときに、それが配位空間の式であることがはっきり意識されてくる。シュレーディンガーは二原子分子のモデルとして振動する回転子をあつかったとき、このことを認識した。実際、シュレーディンガー理論においては、多体問題への一般化は前期量子論の場合とちがってきわめてスムースに行なえるのであって、ψ を配位空間の量とし、波動方程式も配位空間のものとすればよいのである。この一般化によってシュレーディンガーは、もとのドブロイの観点からふみ出たことになる。と同時に、シュレーディンガー理論の波動光学との類推ももはや単に形式的なものになる。かつまた、シュレーディンガーの理論が少

(9) エネルギー固有値を E_n とすると、この波の振動数は $\omega_n=E_n/\hbar$ であるのに対し、対応するボーアの軌道運動の振動数は $\omega_n{}^{\mathrm{orb}}=\dfrac{1}{\hbar}\dfrac{\partial E_n}{\partial n}$ であった。重要なことは、定常状態について前者(ドブロイ振動数)はつねに存在するが、後者は多重周期運動以外では存在しない点である。

(10) じつは非相対論的にはドブロイ振動数もその差だけが絶対的な意味をもっている。

なくとも多体系では、純粋の波動場の理論ではなくて配位空間における波についてのものであり、粒子間のポテンシャル・エネルギーのごとき粒子論の概念を借用するものであり、hybrid な性格をもっていることが表面化したわけである。しかし、じつはこのことは、このシュレーディンガー理論と、元来粒子の力学から出発したものである行列力学との間の類縁を示唆することでもある。言い方をかえるならば、当初あまりにも異質な考えのようにみえていたドブロイの理論とハイゼンベルクの理論の間に、シュレーディンガー理論によって関連がほのみえてきたということにもなる。

さてシュレーディンガーは、シリーズの第3報で彼の固有値方程式に対し(時間を含まない)摂動の方法を展開した。それは非摂動系の固有関数の完全性・直交性にもとづくもので[11]、前期量子論で用いられたような古典力学的な摂動論よりも明快にやれる。そして、議論は縮退のある場合のあつかいを含んでいる。彼は水素原子のシュタルク効果の問題を、一つは変数分離で、もう一つはこの摂動論であつかい、前期量子論のエプシュタインの結果を再現した。彼は、しかしまだゼーマン効果はあつかっていない。磁場のある場合は波動関数が本質的に複素数になるわけであるが、この点にふみ出すことに彼はしばらくためらいをもっていたのである。

§8・2 行列力学との関係

シュレーディンガーの理論は行列力学に踵を接してあらわれ、その強力なライバル理論となった。実際、それは行列力学よりもすっきりした理論にみえ、数学的あつかいもより容易である。この両理論は、一方には行列があるだけであり、他方には波動関数があるだけであって、まったく対蹠的な外観をもっている。にもかかわらず、エネルギー固有値などについてまったく同じ答えを与える。それで、少なくとも両者の数学

---

(11) これは数学的立場からはレーリーの方法を拡張したものに相当する。

的からくりが、本質的に同等なものであることが予想される。行列力学は代数的であり、シュレーディンガー理論は解析的であるが、そういうものが形式こそちがえ、数学的に同等でありうるというようなことは、純粋に数学的な観点からすれば、さして驚くべきことではない。行列と波動関数とがなんらかの仕方で一対一に対応していることが示されればよい。そのための手がかりは、両理論ともその中心にハミルトニアンの固有値問題をもっていることから得られるであろう。

シュレーディンガーは1926年3月の論文で、早くも自分の理論と行列力学との数学的「同等性」を「証明」した。(12) この証明の基礎になったことは、第一に彼の理論において力学量には波動関数に作用する1次演算子が対応すること――つまり運動量 p には $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ が、一般に $A(x,p)$ なる量には $A\left(x,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ なる演算子が対応すること(13)――、そしてこのことに相当して、彼の波動方程式 (8-5) 自身が

$$H\left(x,\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi=E\psi \tag{8-14}$$

と表わせること、また一般に二つの演算子は積について交換しないことである。第二に、これら演算子は配位空間における完全直交系という道具を媒介にして行列に焼き直せるということである。

この証明は具体的には次のようである。(14) シュレーディンガー理論では、エネルギーの固有値 E_n と固有関数 ψ_n は (8-14) の解、すなわち

$$\hat{H}\psi_n=E_n\psi_n \tag{8-14'}$$

---

(12) 「同等性」といっても、両理論の完全な同等性を証明したのではない。

(13) そのさい古典的な $A(x,p)$ なる量に対応する演算子をはっきり与えるには、x と p の積の順序の指定に関する問題がある。

(14) シュレーディンガーは、この段階ではまだ波動関数を実数とみている。実際、スカラー・ポテンシャル $V(x)$ のもとでエネルギー固有状態を問題にする限りでは、これで話がすませる。しかし、ここの説明ではその後の発展に合致して波動関数を複素数としてあつかうことにする。

としてきまり[15]、$\{\psi_n\}$ は完全直交系をつくる。ところでいま、ある他の完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をとり、ψ_n をこれで

$$\psi_n = \sum_l \varphi_l S_{ln} \qquad \left(\therefore\quad S_{ln} = \int \varphi_l^* \psi_n dx\right) \tag{8-15}$$

と展開し、同様に $\hat{H}\psi_{l'}$ を

$$H\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_{l'} = \sum_l \varphi_l H_{ll'}$$

$$\left(\therefore\quad H_{ll'} = \int \varphi_l^* H\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_{l'} dx\right) \tag{8-16}$$

と展開する。すると、展開の係数 S_{ln}（l がかわる）がきまれば ψ_n がきまるのだから、ψ_n なる状態は S_{ln}（l がかわる）の集まりで指定することもでき、同様に $H_{ll'}$（l、l' がかわる）の集まりを与えれば、演算子 $\hat{H}$ の作用は完全にきまるから、$\hat{H}$ のかわりに $H_{ll'}$ の集まりを用いることもできる。したがって (8-14′) の関係も、S_{ln} と $H_{ll'}$ で書き表わすこともできるはずであるが、それは

$$\sum_{l'} H_{ll'} S_{l'n} = S_{ln} E_n \tag{8-17}$$

となる。 これは、 行列力学でエネルギー固有値を求めるための方程式 (6-25) とまったく同じ形である[16]。

さて、一般に $A(x, p)$ なる力学量に対応して $A\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ なる1次演算子を用いて (8-16) と同じ方式、すなわち

$$A_{ll'} = \int \varphi_l^* \hat{A} \varphi_{l'} dx \tag{8-16′}$$

でつくった $A_{ll'}$ の集まりは、この量の行列力学における行列表現とみなすことができる。なぜなら、第一に A、B などの、演算子としての加法・乗法は、この $A_{ll'}$、$B_{ll'}$ などの行列としての加法・乗法に対応す

---

(15) こんご A なる量に対応する演算子を $\hat{A}$ と書くことにするが、演算子であることが明らかな場合には単に A と書くこともある。

(16) (8-17) 式で S_{ln} の集まりがユニタリー行列をつくることは、$\{\psi_n\}$ が完全直交系をつくることからわかる。

る。第二に、演算子としての $\hat{p}=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ と、演算子としての $\hat{x}$ すなわち $x\times$ とが、[17] 任意の関数 ψ に対して

$$(\hat{p}\hat{x}-\hat{x}\hat{p})\psi=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi)+xi\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}=-i\hbar\psi$$

$$\text{すなわち}\quad \hat{p}\hat{x}-\hat{x}\hat{p}=-i\hbar \tag{8-18}$$

なる交換関係をもつことに対応して、演算子 $\hat{x}$、$\hat{p}$ から (8–16′) でつくった行列についても (8–18) と同形の交換関係がみたされるが、それはボルン－ヨルダンの交換関係にほかならないからである。

こうしてシュレーディンガーの理論は、少なくともエネルギーの固有値に関する限り行列力学と等価なものといってよいことがわかった。もっとも、ここに示したことはシュレーディンガー理論から行列力学の基礎的な式が導けることであるが、じつはこれは逆にたどることもできる。さらに運動方程式の部分についても、両理論の同等性がいえる。(もっとも、この点の完全な証明のためには、シュレーディンガー理論を後述のようにもう少し展開しておく必要がある。)

とにかく、この「同等性の証明」は非常に重要な意味をもっている。一般的にいって、この証明がはたされたことは、行列力学あるいは波動力学が、少なくとも量子論の数学的なスキームとして、もはや正しいものであるという確信を人々に与えた。

この証明はまた、波動力学の見方を拡げ深めるきっかけを与えた。われわれは力学量が行列力学では行列 $\underline{A}(\underline{x},\underline{p})$ (ただし $\underline{p}\,\underline{x}-\underline{x}\,\underline{p}=-i\hbar$) で代表されることに対応して、波動力学では同じ量が $A\left(x,-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ なる演算子で代表されるといってよいことになる。こうして波動力学においても古典論で用いられた力学量に対応するものを一般的に考えるこ

(17) 上では簡単のため再び1自由度として論じたが、一般の場合は配位空間で考える。また上のあつかいでエネルギー・スペクトルは離散的としているが、それが連続的な場合や両方を含む場合もあり、そういう場合は全部合して固有関数が完全系をつくるので、証明を適当に一般化せねばならない。

とが可能になる。ただし、こうして力学量が演算子で表わされるということがどのような事実との対応をもつかは、さらに解明を要する問題である。

さらに「同等性の証明」の結果として、行列力学における行列要素を——したがって遷移確率を——いまやシュレーディンガーの理論を用いて容易に算出できることになった。これをみるには、上の $\{\varphi_n\}$ として エネルギー固有関数 $\{\psi_n\}$ 自身をとる。すると $H_{ll'}$ は対角行列である。したがって行列力学の基礎方程式のスキーム（A）に対する解は

$$
\begin{aligned}
x_{nn'}&=X_{nn'}e^{\frac{i}{\hbar}(E_n-E_{n'})t}, \quad X_{nn'}=\int\psi_n{}^*x\psi_{n'}dx \\
p_{nn'}&=P_{nn'}e^{\frac{i}{\hbar}(E_n-E_{n'})t}, \quad P_{nn'}=\int\psi_n{}^*\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi_{n'}dx
\end{aligned}
\tag{8–19}
$$

にほかならないことがわかる[18]。したがって、たとえば選択則は $X_{nn'}=\int\psi_n{}^*x\psi_{n'}dx$ が消えるところということになり、それが対称性——したがってたとえば角運動量の保存則——と関係していることも理解できることになる[19]。このような結果は、行列力学の立場からすれば、シュレーディンガー方程式は少なくとも行列力学の方程式を解くための便利な解析的テクニークを提供するものである（実際これによって最初ハイゼンベルクが目標としたバルマー線の強度を正しく量子論的に算出するということもはじめて可能になった[20]）。のみならず、遷移振幅に対する上の

(18) シュレーディンガーの論文が出はじめるや、これは学界にハイゼンベルクの場合にもまさる衝撃を与えた。そのもっとも早い反応の一つはパウリで、彼はドブロイ－シュレーディンガーの波動論が行列力学に欠けていた側面をまさに補うものであることを感知し、両理論の内的関連を考え（8–19）から出発して、両者の数学的同等性に関してシュレーディンガーに近いところまで達した。これは論文にはならなかったが、26年4月のヨルダン宛の手紙が証拠物件となっている。

(19) 先にボーアが対応原理で選択則を出した場合にはこの点が明瞭でなかった。

(20) シュレーディンガー自身は、これにより前述の第3報で水素のシュタルク線の強度を算出し、実験と比較している。

形は、遷移をさらに量子力学的に考えていくさいの出発点となるであろう。

この「同等性の証明」は、行列力学の意味を深める上でも教えるところが多い。前に行列力学において、任意の力学量の行列 $\underline{A}$ を $\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$ に変換するようなユニタリー行列 $\underline{S}$ というものを考えたが、これの物理的な意味もより明らかになる。すなわちユニタリー変換とは、最初の $\underline{A}$ の行列表現を (8–16′) によってつくり出す基礎に役立っていた直交関数系 $\varphi_1, \varphi_2,$ ……を別の直交関数系 $\psi_1, \psi_2,$ ……にとりかえることであるとみることができる。そのさい、$\underline{S}$ の行列要素というのはこの二つの関数系の間の展開の関係 (8–15) に現われる係数にほかならない。そして A なる量が $A_{ll'}$ なる行列で表わされるのと同じ意味において、S_{ln}（l がかわる）は (8–15) からわかるように波動関数 ψ_n で表わされる状態の行列力学における表示とみなすことができる。とくに $\underline{H}$ を対角型にする表示へのユニタリー変換である (8–17) の変換行列 S_{ln} の第 n 列、すなわち $\xi_l^{(n)}$ は、n 番目の定常状態 ψ_n の一つの表示である。

とにかく行列力学は、前にのべたようにユニタリー変換を通じてすでに (6–25) なる形の固有値方程式にまで到達していたのだから、かりにシュレーディンガー理論が出なかったとしても、これを解くための数学的方法の追求から、遅かれ早かれ、おのずからシュレーディンガー方程式に到達したであろう、ということがときどきいわれる。しかし、これは行列力学の側からの想像である。一方すでに1923年にドブロイの物質波の観念と、その波動方程式を見出すための主要なヒントが出されていたのだから、シュレーディンガーか誰かが1925年春ころに――つまりハイゼンベルクの理論の出現に先んじて――波動方程式を出していたら歴史がどうなったろうと想像してみることも同様に許されるだろう。[(21)] 歴史的事実にかえっていうならば、シュレーディンガーの論文のわずか前に、行列力学から出発して行列のかわりに演算子を用いようとしたボルンとウィーナー N. Wiener の仕事、また行列の形式を積分方程式で置き換えようとしたランチョス C. Lanczos の仕事が、波動力学の方向へのなにほどかのきざしを含んでいた。（ボルンはシュレーディンガーの論文

が出たときやられたと思ったことを述懐している。)

§8・3　時間による波動方程式、その他

「固有値問題としての量子化」と題するシリーズの最後の論文(第4報)は、この表題の枠を出たものであり、ついに時間によるシュレーディンガー方程式を提出している。論理的には、波動力学の基礎をなすこの方程式が発見の順序としては最後にくるわけである。(22)

シュレーディンガーは前に時間を含む波動方程式(8-11)を書いていたわけであるが、これはパラメターEを含んでいるので、そのままでは本来の波動方程式と称するに不適当なものである。本来の波動方程式は、これに(8-12)を組み合わせてEを消去したものであり、結果は

$$\hbar^2\ddot{\psi}-\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V\right)^2\psi=0 \qquad (8\text{-}20)$$

である。しかしながら、もし(8-12)のかわりに

$$\dot{\psi}=-i\omega\psi \qquad (\omega=E/\hbar) \qquad (8\text{-}21)$$

をとり(これは $\psi=\psi_{t=0}e^{-i\omega t}$ を意味し、やはり時間的に単振動的であって定常波を表わす)、それをシュレーディンガー方程式(8-5)に組み合わせてEを消去したとするならば、(8-20)のかわりにこれを因数分解した

---

(21) パウリの著書『波動力学の一般原理』(1933)以来、シュレーディンガー理論から入ってなんらか本節のようなやり方で行列力学をひき出すという進み方がよりわかりやすいものとして量子力学の教科書で一般的になっているが、それは当時の情況を反映しているともいえるのである。当時、この新力学をつかもうと努力した人々の多くが、その回想などによると、波動力学から入り、シュレーディンガーによるこれと行列力学との同等性の仕事を通じてはじめて行列力学を理解しえたといっている(たとえばフェルミ)。

(22) シュレーディンガーがこの論文を *Annalen der Physik* 誌に送ったのは1926年6月であるが、それはこの方程式を見出した直後であることは、彼のプランク宛の手紙などから推察される。

$$i\hbar\dot{\psi}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V\psi \tag{8-22}$$

を得る[23]。この (8-22) を本来の波動方程式としてとるということは、ψ が本質的に複素数であるとする立場に移ることである。この場合、ψ の実部（あるいは虚部）が (8-20) をみたすことになる。元来、光の理論との類推によって得られた定常状態のシュレーディンガー方程式をもとにして、上のようにして時間による波動方程式 (8-22) に達したわけであるが、ここまでくると再び波動光学との類似は減り、シュレーディンガー方程式の独自性がはっきりしてくる。それは、ことに波動関数が本質的に複素数であり、同時に時間について1階であるということにある[24]。(8-22) は、ドブロイの考えた進行波の従う方程式を（非相対論的な場合について）エクスプリシットに与えたものといえる。そして、この線型同次の波動方程式が基礎方程式であるということの重要な意味は、定常状態を表わす単振動の波に限らず、それらを任意に重ね合わせた波——それはもはや一般に定常状態ではなくて非定常状態である——も、その基礎方程式の解となり、定常状態と同じ資格でもって電子の可能な運動状態を表わすものと考えねばならぬということである。こうして、ボーアからハイゼンベルクに至るまでつづいてきた制約——すなわち定常状態としてのみ状態を考えるという制約——が打破され、流動化された。波が何を意味するかはともかくとして、シュレーディンガーの波動力学の本質的な点は、先に定常状態のシュレーディンガー方程式が、離散的

(23) (8-21) のかわりに $\dot{\psi}=i\omega\psi$ をとることもできるが、すると (8-22) のかわりに、そこで $i\to -i$ とした波動方程式を得る。しかし、これと (8-22) とは物理的に同等であり、その一方をとれば十分である。

(24) 自由な場合、波動方程式 (8-22) は $\dot{\psi}=\frac{i\hbar}{2m}\Delta\psi$ となるが、そこですでに i が現われる。このことは理論が非相対論的なことと関係がある。波動関数が本質的に複素数的であることは、また波動方程式が時間について1階であるにかかわらず可逆的（時間反転に不変）な意味をもつことを可能にするためにも必要である。上の波動方程式は、そこに $\hbar$ が現われてくる点でもマックスウェル方程式とちがうが、それは電子が光量子とちがって静止質量をもつことに関係がある。

な束縛状態と連続的な非束縛状態とを包括したのみならず、いまや時間によるシュレーディンガー方程式が定常状態と非定常状態を包括し、重ね合わせの関係が成立するようなものとして電子の状態関数というものを理論の中心にすえたことにある——もちろん状態概念の意味をさらに解明する必要が残っているけれども。さらに、この理論の特徴は、この波が現実の空間時間におけるもの（多粒子系では配位空間におけるもの）であり、したがって、電子の状態というものに波の描像を与え、波束のようなものによって電子の位置を問題にすることができることである。このことは、行列力学ではあつかえなかった電子線の屈曲や散乱の問題をあつかうのにも適していることを意味する。さらに光の放出や吸収を含む遷移についてさえ、それを真に量子力学的にあつかうための基礎は、行列力学よりもむしろ波動力学のなかに含まれていることが期待されるのである。

とにかくシュレーディンガー理論にあっては、情況を記述するものは本来波動関数だけであるから、運動方程式もこれに対して与えられねばならなかったが、それが時間によるシュレーディンガー方程式（8–22）なのである。行列力学では、運動方程式を物理量の表現としての行列に対するものとして考えねばならなかったのに対して、波動力学はこれを状態の表現としての波動関数の変化としてとらえることになる。

波動方程式（8–22）の重要な性質は、これの結果として

$$\dot{\rho}+\mathrm{div}\ \vec{j}=0$$

$$\text{ただし}\quad \rho=\psi^*\psi,\qquad \vec{j}=\frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi-\nabla\psi^*\psi) \tag{8–23}$$

が成り立つことであり、したがってまた$\int\rho dx$ が保存することである。シュレーディンガーはρと$\vec{j}$を場の“強度”と“流れの密度”とよんだ。

シュレーディンガーはまた、波動方程式（8–22）は時間を含む作用関数 W に対する古典的なハミルトン–ヤコービ方程式（4–12）において

$$\frac{\partial W}{\partial x_i}\rightarrow\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial W}{\partial t}\rightarrow-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} \tag{8–24}$$

なる置き換えを行なって、全体をψに作用させるという形式的手続きで

得られることを指摘した。このことは、よりショートカットにいえば、古典的な式 $H(x, p)=E$ において、p と E を

$$p_i \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \text{(8–25a, b)}$$

で置き換え、全体を ψ にオペレートした

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi \qquad \text{(8–26)}$$

として波動方程式 (8–22) は得られるということである。[(25)] (8–24) あるいは (8–26) のようにして波動方程式が得られるということが、波動力学において古典論との対応原理的関係をビルトインするものであり、[(26)] ドブロイの指摘したような、波束の運動と粒子の運動との関連を一般的に保証する。

じつはシュレーディンガーは、はじめ (8–20) のかわりに (8–22) を採用することにはためらったのであるが、(8–22) のほうが合理的である一つの理由は、そのような対応を保証するところにある。われわれの波は粒子の位置に相当するものを波の振幅が大きな値をもっている場所として含んでいるのみならず、速度に相当するものをも波の群速度としてそれ自身のなかに（すなわち ψ を考えるだけで $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ を考えないで）含んでいる。ψ が速度に関する知識を含んでいることは、ψ が複素数であり、位相をもつことによっている。こうして波束の運動が粒子の運動と対応をもつ（波束の拡散ということは別として）ためには、波は ψ を指定するだけで運動状態がすっかり定まってしまうようなものであるべきであって、したがって時間について１階の微分方程式をみたすべきである。[(27)]

---

(25) つまり古典力学を量子力学へ格上げすることは、先に行列力学への移行がポアソン括弧→交換子の置き換えではたされたのに並んで、波動力学への移行はハミルトン–ヤコービ方程式に対する (8–24)（あるいはエネルギーの式に対する (8–25)）のルールで簡明に表わされる。くわしくいうと、じつはそのさいいろんな注意が必要であるが、いまそれにはふれない。

(26) エーレンフェストの定理といわれるものもその一部である。

波の本質はともかくとして、電子の粒子的な現われ（霧箱に見られるような）は、電子が狭い領域でのみ大きな振幅をもつような波動関数、すなわち波束の状態にあることとみなされる。そしてその拡がりの程度の範囲で力が一様とみていいような波束については——前にのべたように電子が $|\psi|^2$ の密度で雲のように拡がっているものとして——、その重心の移動がニュートン力学によるものに漸近的に一致することが証明できる。ただし、波束は成分平面波の分散効果のために、それがシャープであればあるほど早く空間に拡散してしまうという性質をもっている。したがって、運動の経過のあいだに力が一様と見てよい程度の範囲の外まで拡がらないような波束をつくりうるような場合に、波動力学は古典力学に漸近するといってよいことになる。たとえばマクロな電場・磁場における電子線の屈曲実験などでは、この意味で古典力学が実際妥当する。ただ原子内の電子とか、原子がつくるミクロな電場で弾性散乱される電子の場合のように (7–19) の $\lambda(x)$ の場所的変化の急激なところでは、古典論に近似させようとすると非常に鋭い波束から出発せねばならないことになり、したがって運動の経過のあいだにそれは速かに拡がってしまい、波動性が表面化するのを防ぐことができないのである。

このような古典力学の適用限界、漸近性の認識はすでに波動力学の発見のさいの根拠になったものであったが、それは原子内電子の場合についての——高量子数での古典論との漸近的一致という——ボーアの対応関係とも通じるものである。実際、核から遠ざかるにつれて力の勾配がゆるやかになり、波束が拡がらないでまわりうる回数はだいたい n（主量子数）の程度であることがわかるから、n が大になるにつれて古典論に漸近するようになるのである。それに反し n の小さい原子の内奥での運動では波動性が本質的である。

以上は、1体問題の場合についてのべてきたが、前に定常状態の方程

(27) 方程式が複素数に対する1階のものであるべきことは、のちの一般的解釈の立場からすれば、ψ を用いて確率関数が定義されうるために必要である（確率関数はいたるところ正であり、全確率の保存の条件をみたさねばならない)。

式についてそうであったように、いまの時間による波動方程式についても多粒子系への拡張はスムースであり、この場合、再びそれは配位空間におけるものとなる。ψ も ρ や $\vec{j}$ も配位空間の量である。それでも配位空間は現実空間に密接につながった意味をもつものであるから、シュレーディンガーの理論が時空描像を回復するということはいぜん妥当するといってかまわない。

じつはシュレーディンガーが時間による波動方程式をたてる必要にせまられたのは、非保存系の問題をあつかうためであった。この場合、V が t によるが、そのような V を用いて (8–22) が成り立つとする。彼はこれにもとづいて、原子による光の散乱（分散）の問題を時間をふくむ摂動論によってあつかった (次節)。これは重要な展開のもとになるものである。それとならんで時間による波動方程式の最も重要な応用は、それを電子の散乱などの問題に適用することであることは明らかであろう。しかし、シュレーディンガー自身は、やはり前期量子論と行列力学であつかわれてきた種類の問題が波動力学でどうあつかわれるかということに関心が集中していたため、物質粒子の散乱の問題の方向には進まなかった。

ここでシュレーディンガー理論の構成を前の行列力学の図式（§6・2の(A)）と応対させて図式化しておこう。この理論は運動方程式 (8–26) 式を基礎とするが、ここでとくに ψ が振動型（$e^{-i\omega t}$ なる時間依存性をもつこと）とおくと、エネルギー固有値（と固有関数）を定める定常状態の方程式 (8–14) とドブロイの第一関係 $E=\hbar\omega$ に達する。すなわち

$(\widetilde{\text{III}})$：運動方程式 ─ 非定常解
$(\widetilde{\text{III}})$：運動方程式 ＋ $(\widetilde{\text{I}})$：振　動　型 ─ 定常解 $\begin{cases} (\widetilde{\text{IV}})：エネルギー固有状態 \hat{H}\psi=E\psi \\ (\widetilde{\text{V}})：ドブロイの第一関係 E=\hbar\omega \end{cases}$　$(\widetilde{\text{A}})$

ここで $(\widetilde{\text{IV}})$、$(\widetilde{\text{V}})$ に現われる常数 E がエネルギー固有値を表わすという物理的意味づけは対応論的にも根拠づけられるのであるが（次節参照）、それは行列力学において (IV) で $\underline{H}$ の対角要素がエネルギー固有値なることが対応論的に推論されたのと同様である。なお $(\widetilde{\text{A}})$ において行列

力学における（II）に対応するものは、ドブロイの第二関係 $p=h/\lambda$ あるいは（8-25a）として $(\widetilde{\mathrm{III}})$、$(\widetilde{\mathrm{IV}})$ のなかに含まれていることはおって明らかになる。

ところで、前に行列力学の最初のスキーム（A）が（B）のように言い直されたのに対応して、波動力学の $(\widetilde{\mathrm{A}})$ は次のように言い直される。$(\widetilde{\mathrm{A}})$ においては $(\widetilde{\mathrm{IV}})$ は $(\widetilde{\mathrm{III}})$ から導かれる関係にあるが、エネルギーの固有値方程式としての $(\widetilde{\mathrm{IV}})$ をまず解いて、すべての固有解を知れば $(\widetilde{\mathrm{III}})$ の一般解を得ることができる。すなわち $(\widetilde{\mathrm{IV}})$ の解としてまず ψ_n、E_n を得、E_n から $(\widetilde{\mathrm{V}})$ によって ω_n をつくり、これに $(\widetilde{\mathrm{I}})$ を考慮して $\psi_n e^{-i\omega_n t}$ なる振動型の関数をつくると、このもの、およびその重ね合わせとして $(\widetilde{\mathrm{III}})$ の解を得ることになる。すなわち

$$
(\widetilde{\mathrm{IV}}) \longrightarrow \left\{
\begin{array}{lcl}
\psi_n & \longrightarrow & \sum\limits_n C_n \psi_n e^{-i\omega_n t} : (\widetilde{\mathrm{III}}) \\
 & & \Big\uparrow (\widetilde{\mathrm{I}}) \\
E_n & \xrightarrow[(\widetilde{\mathrm{V}})]{} & \omega_n
\end{array}
\right. \qquad (\widetilde{\mathrm{B}})
$$

このようにして、一般の非定常解 $\sum\limits_n C_n\psi_n e^{-i\omega_n t}$ を得るということは、数学的にいうならば $(\widetilde{\mathrm{III}})$ なる偏微分方程式を固有関数のテクニークで一般的に解いたということにすぎない。

シュレーディンガーのシリーズ第4報の論文は、最後のところで波動方程式の相対論化にふれており、外部電磁場が働いているさいの相対論的スカラー波動方程式を書き下した（これは外場がない場合は前の（7-21）である）。そして、これから水素原子の微細構造の式が正しく出せないことを注意している。[28] この部分は、じつはむしろ彼の全部の仕事の出発点となったことであった。前述したように、彼が元来、問題を相対論的にあつかって失敗したのち非相対論にきりかえてはじめて第1論文以下の成功を達成することができたということは意味深いことである。

（28） スピンを考慮しない相対論的波動方程式を電子に適用すると、水素原子のエネルギー準位の問題についてゾンマーフェルトの結果とちがった結果に導き、非相対論的理論にもおよばないことになる。

量子力学は波動力学の線でも行列力学の線でも、まずもって質量をもった粒子の非相対論的な場合について確立されざるをえないという論理的理由があったのである。[29]

なおシュレーディンガーの相対論的方程式は、その後ゴルドン W. Gordon (1926年9月) とクライン (26年12月) によってさらに研究され、"クライン－ゴルドン方程式"とよばれるようになる。[30]

ここで、なお次の一、二の点にふれておこう。外から電磁場が働いている場合、そのポテンシャルを $(\vec{A}, A_0)$ と書くと、1個の粒子の古典力学は

$$H=\frac{1}{2m}\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+eA_0$$

なるハミルトニアンから導かれる（これはローレンツ力を含意している)。それゆえ、この場合の非相対論的波動方程式は、$E=p^2/2m$ の関係に対して

$$E\to E-eA_0,\quad \vec{p}\to\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A} \tag{8-27}$$

なる置き換えと、(8-25ab) なる置き換えとを併せ行なった結果を ψ にオペレートすることによって得られる。相対論的な場合は、$E^2/c^2=p^2+m^2c^2$ の関係に対して同様の手続きをほどこせばよいわけだが、結果は

---

(29) 相対論的スカラー方程式は、電子に適用できないだけでなく、そのままでは確率解釈を保証せず、これから出発しても量子力学の公理に到達することはできなかったはずである。

(30) クラインはすでに1926年4月、カルーツァ T. Kaluza の理論 (1921) とドブロイおよびシュレーディンガーの仕事（後者の第1・2論文）との関係をあつかっているが、そこでは5次元波動方程式を用いている。第一次大戦後，相対論の華々しい成功のあとをうけて、ワイルの『空間・時間・物質』(1918) をはじめとして相対論の名著がいっせいに出ていた。こうして当時の人々には相対論の影響を強くうけた人が多く、このことが量子力学の形成史に影響を与えている。ドブロイ、シュレーディンガー、クライン、パウリ、フェルミ、ディラックら、みなしかりである。(これらの人々はみな統計熱理論にもまた関心が深かった。)

前述の外部電磁場が働いているさいの相対論的スカラー波動方程式となる。いずれにせよ、このようにして得られた波動方程式は、

$$\psi \to \psi \ \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\Lambda\right) \tag{8-28a}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \tag{8-28b}$$

なる変換に対して不変である（ここに添字 μ は1，2，3，4とかわり、$x_4=ict$。また Λ は x_μ の任意の関数）。つまり荷電粒子の波動関数の位相が各時空点ごとに（8-28a）のようにかわり、それに応じて電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ が各時空点ごとに（8-28b）とずれる変換（これを"（局所的）ゲージ変換"という）に対して、理論は不変である。電磁相互作用を（8-27）と（8-25）の置き換えの手続きで導入すれば（8-28）に対する不変性が保証されることはフォックやロンドンによって認識された（1927）。逆に（8-27）による電磁相互作用はゲージ不変なものとして"最小限に"必要なものであって、"極小電磁相互作用"とよばれる。とにかく、上により磁場のある場合の波動力学も（さしあたりスピンの効果は別として）はっきりした。

われわれは先に古典力学（とくにそのハミルトン－ヤコービ形式）と波動方程式との関係をいろいろ考察してきたが、シュレーディンガー方程式が見出されたうえでは、後者から出発してその（半）古典的近似をよりシステマティックにしらべることができる。その代表的な方法は、（8-2）ないし（8-7）のかわりに $\psi=e^{iS/\hbar}$ とおいて、この S を $\hbar$ のベキ級数

$$S=S_0+\frac{\hbar}{i}S_1+\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_2+\cdots\cdots$$

と展開することから出発するものである。これにもとづく近似はシュレーディンガー理論が出るやすぐにヴェンツェル G. Wentzel、ブリルアン L. Brillouin およびクラマース（1926）により進められた。

波動力学が出た直後に、これでいろんな実際問題を解く仕事は、シュレーディンガーにひき続いて、まずヴェンツェル、ゴルドン、ゾンマー

フェルトらの腕っぷしのいい人々によってすすめられた。ゾンマーフェルトらが数学的手腕で成果をあげた場合は、方程式を解くという技術的側面が強いわけであるが、一般に数学の物理における重要性は、これにつきるわけではなく、むしろもっと深いところにあることを見落としてはならない。数学は新しい理論をつくってゆくさいの方法という面をもっており、しかも場合によっては数学は物理的解釈に先行して理論を進めさせるような能力さえもつのである。そのことが量子力学の形成において重要な意味をもっていた。ボルンらによる行列力学の形成において、またシュレーディンガーによる波動方程式の発見の場合に、それが働いている。

§8•4　物質場の立場

ハイゼンベルクは、はじめから意識的に観測との関係のはっきりした量でもって理論を組み立てるという立場をとったために、(状態ベクトルではなくして)“行列要素”から出発して「行列力学」に達することになった。これとは対照的に、ドブロイやシュレーディンガーはあらかじめその物理的意味づけのはっきりしていない波をとにかくナイーヴに導入して、理論をつくっていった。新しい理論を構想し建設していくには、そういうゆき方も必要なのである。ただし、もちろん、この波の正体が何か、それと粒子との関係はどうなのか、という問題はたえずつきまとっている。ドブロイはその発見のさいの推論に見合って、波は粒子に伴ったものであり、両者はわかちがたく共存しているという見方をとり、“嚮導波”(pilot wave)の解釈をすすめた。

シュレーディンガーは、しばらく波の物理的意味づけについて明言しないで定式化をすすめていったが[(31)]、彼が幾何光学から波動光学への移行のアナロジーで、質点力学のなめらかな拡張的変革として波動力学をつ

(31)　シュレーディンガー方程式は ψ の物理的解釈が確定する前に得られたことは、マックスウェル方程式がその正当な解釈に先立って見出された場合と似ている。

くっていったその進み方に見合って、次第に波動一元論的な見方を強めていった。すなわち、その波動場を電子を表わす実在的なものとみなし、電子の粒子性を波動性のなかに解消しようとし、さらにそれにともなって量子遷移をも連続的な過程に解消しようとする見方を強めていった(この立場はシリーズの最後の論文以降、次第にはっきり主張されるようになった)。しかし、はたしてこの波の運動が電子の粒子的ふるまいや不連続的遷移の面をほんとうにうまく包括しうるだろうか。光の理論の場合、単に幾何光学から波動光学にかわって終わりになったのではなく、さらに再び光量子論が出てきて粒子－波動二重性を認めざるをえなかったように、電子に対しても波動一元論で終わるのではなく、粒子性が再び顔を出し、二重性をもっと深刻に問題にせねばならないのではなかろうか。しかし、まず波動一元論的な見方でどの程度うまく解釈できるかを検討しておくことは必要なことである。

1体の波動方程式 (8-22) 式には m や V のような粒子的な量が現われているが、この立場からすると、mはさしあたり単なる常数パラメターであり、Vは場所ごとの波長 $\lambda(\omega)$ を自由な場合の値からずらす原因が核やその他の作用によって空間に分布される仕方を与えるものとみる。そうみるならば、この (8-22) は一つの純然たる“古典的な”波動場の方程式である。もっとも、そこになお$\hbar$が顔を出しているが、m、Vのかわりに、$\tilde{m}=m/\hbar$、$\tilde{V}=V/\hbar$ を用いることにすると、それは

$$i\dot{\psi}=\left(-\frac{1}{2\tilde{m}}\Delta+\tilde{V}\right)\psi \qquad (8\text{–}29)$$

と表わされ、$\hbar$ も姿をひそめる。ここに$\tilde{V}$は、場所ごとの波長 $\lambda(\omega)$を自由な場合の値 $(2\tilde{m}\omega)^{-\frac{1}{2}}$ から $[2\tilde{m}(\omega-\tilde{V})]^{-\frac{1}{2}}$ にずらす作用をもつ。このような波動場に許される固有振動は、(8-22)において $\psi=e^{-i\omega t}\varphi(x)$ とおいて得られる方程式(ここでφを改めてψと書く)

$$\left(-\frac{\hbar}{2m}\Delta+V/\hbar\right)\psi=\omega\psi \qquad (8\text{–}30)$$

の固有解として得られる。このような立場では電子の粒子性は影をひそめるが、少なくとも電子の数が数えうるという意味の粒子性はもつべき

である。すなわち、この波動場は——質量と荷電を伴う物質場であるが——その質量がmの、荷電がeの整数倍であるという意味の粒子性をもつと考える。ところが波の強度を意味する $\rho=|\psi|^2$ なる量は、その全空間にわたる積分 $\left(\int\rho dx\right)$ が保存されることがわかっているから、$e\rho$ を電気密度、$e\vec{j}$ を電流密度の分布とみなすのが合理的である。[32] そしてこんご電子が“1個”存在する場合についてのみ考えることにするならば、ψの振幅に対する制限条件 $\int\rho dx=1$ （これは“規格化条件”とよばれるものと同じである）をおくべきことになる。こうして水素原子には、このような電気密度（と電流密度）からなる荷電雲の描像が当てはまる。

シュレーディンガーは、このようなψ場と電磁ポテンシャルとの結合によって電磁相互作用がうまくあつかえるとした。より具体的にいうと、原子による光の散乱をあつかうのに、前にもふれたように、時間的に周期的に変わるポテンシャルが原子内電子に摂動として働くことにより、それによる荷電雲の強制振動がソースとなってマックスウェル－ローレンツ的に電磁波をうち出すという機構でもってクラマース－ハイゼンベルクの分散公式が出ることを示した。これは有効な見方であり、光の散乱を力学法則にもとづいて導くものである。

シュレーディンガーは、この立場をおし進め、さらに原子の発光も説明しようとした。すなわち定常状態では、$\psi^*\psi$ は変動しないゆえに光を発しないのだと説明する。ところが、それぞれ ω_1、ω_2 なるドブロイ振動数をもつ二つの定常波の重なった非定常状態では、$\psi^*\psi$ は $\omega_1-\omega_2$ なるうなりの振動数で振動するから、古典電磁気学に従ってこの振動数の光を出すことになり、それが直ちにリッツの規則をみたすスペクトル線を与え、さらにはこのような見方でスペクトル線の強度まで計算できるとする。

このような純粋な波動場の立場では、原子の定常波のドブロイ振動数ωが物理的なものであって、原子のエネルギーがそれから $E=\hbar\omega$ の関

（32） この解釈は、のちの場の理論にうけつがれるものである。

係できまると考える必要さえなくなり、また遷移も連続的な過程に解消するに至る。実際シュレーディンガーは、ついにこのような考え方を主張するに至った。しかし、これは、そもそも輻射の放出が不連続的におきるというプランクの最初の考えからはじまり、アインシュタインの光量子やボーアの量子遷移の考えへと発展してきた従来の量子論の主要な考え方を一挙に解消しようとする過激なものであり、そのままでは、とても電子の粒子性、光量子、および不連続的遷移を要求した諸事実を消化できそうにない。ボーアとハイゼンベルクは、この見方に強硬に反対した。このような考え方ではプランクの分布式も出ないだろうし、フランク－ヘルツの実験も説明できないだろう。やはり $E=\hbar\omega$ はエネルギーでなければならないし、遷移の不連続性の観念もなんらか必要なのである。

シュレーディンガーの発光の考え方は極端であって受け入れられないが、その分散の考え方は合理的な面をもっている。やがてクラインらは、これを改良して、電子と電磁場の相互作用の半古典的あつかいとして発展させていくことになる。それは、この問題の完全な量子力学的あつかいではないが、ハイゼンベルクの理論が光の放出などについて遷移確率を単に ad hoc に与えていたのに比べれば進歩である。

このような光との相互作用の問題は別として、はじめにのべた物質場の描像についてもう少し考えておこう。いま考えている1電子物質場について (8–30) の固有振動 ω、ψ_ω が求まると、場の全エネルギーは $E=\hbar\omega$(ドブロイの第一関係) によって定まるとして、この関係を (8–30) にはじめから入れてしまったものがもともとの定常状態のシュレーディンガー方程式にほかならなかったことになるが、いまの立場からすれば $E=\hbar\omega$ の関係も波動一元論の立場で根拠づけうることが望ましい。そのためには、ψ は実在的な物質場であるとしているから、それは荷電だけでなくエネルギーや運動量もはこぶものであるはずであることを考え、これを勘定する。ところで ψ の次元のえらび方はその物理的意味づけに関係がある。先の (8–29) 式とかまた $e|\psi|^2$ を電気密度とする解釈などにあっては、それは

$$[\phi]=l^{-\frac{3}{2}}$$

にとっていた（1体の波動関数の場合）。そして波動方程式（8–22）は、

$$L=\frac{i\hbar}{2}(\phi^*\dot{\phi}-\dot{\phi}^*\phi)-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\phi^*\nabla\phi-V\phi^*\phi \tag{8–31}$$

なるラグランジュ密度からつくられる作用積分 $A=\int_{t_1}^{t_2}dt\int Ldx$ を用いて、$\delta A=0$ なる変分原理から導かれる。この A はたしかに作用の次元をもっている。（8–31）には $\hbar$ が顔を出しているが、前の $\tilde{m}$、$\tilde{V}$ および、さらに

$$\tilde{\phi}=\sqrt{\hbar}\,\phi \tag{8–32}$$

を用いることにすると、（8–31）は

$$L=\frac{i}{2}(\tilde{\phi}^*\dot{\tilde{\phi}}-\dot{\tilde{\phi}}^*\tilde{\phi})-\frac{1}{2\tilde{m}}\nabla\tilde{\phi}^*\nabla\tilde{\phi}-\tilde{V}\tilde{\phi}^*\tilde{\phi} \tag{8–31′}$$

となり、$\hbar$ は影をひそめる。$\tilde{\phi}$ は$\sqrt{m/(lt)}$ の次元をもち、もちろんϕと同じ波動方程式に従う。いずれにせよ、上のLからこの物質場は、

$$E=\int\tilde{\phi}^*\left(-\frac{1}{2\tilde{m}}\Delta+\tilde{V}\right)\tilde{\phi}dx=i\int\tilde{\phi}^*\dot{\tilde{\phi}}dx \tag{8–33}$$

$$=i\hbar\int\phi^*\dot{\phi}dx=\int\phi^*H\left(x,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi dx \tag{8–33′}$$

なるエネルギーをもつべきことになる。ところが、（8–33）は（8–30）の固有解に対しては、$\int|\phi|^2dx=1$ の条件を考慮すると、たしかに $\hbar\omega$ となる。[(33)]

さらにいまの立場で、そもそも電子が局在的な粒子のように現われるということをどう理解するかという問題もあるわけだが、これについて

(33) シュレーディンガーやゴルドンは、相対論的なスカラー波動方程式の場合について、物質場の立場でそれをラグランジアンから導き、この物質場のカレント・ベクトルやストレス・テンソルをきめることを行なった。これは波動場の理論の基礎として、やがてハイゼンベルク－パウリの場の量子論（第14章参照）につながる性質のものである。

は波が波束の状態にあるとすればよいことは前にのべた。

こうして粒子概念は、より広い波の概念のなかに吸収されてしまったようにみえる。

以上の議論はすべて有意義なものであるけれども、そのさいの立場はそのままでは保持できないものである。このような、本質において連続的な、因果的な、しかも量子化という手続きを必要としない、いわば古典的な波動一元論の立場が貫徹するとすれば話は簡単であるが、そうはいかない。そのわけの一、二をのべよう。

この立場では、電子は連続体として $|\psi|^2$ の密度で空間に拡がっているとしているが、にもかかわらず、このような状態で実際に電子の位置を観測してみるならば、やはり必ずどこか一点といっていいような狭い領域に、必ず一定の e と m をもったもの――粒子――として見出される。ところが前にのべたように、波束はそれがもともとシャープであればあるほど、速やかに空間に拡がりぼやけてしまう。(34)

このような困難をもっと浮き上がらせるには、衝突の問題を考えてみるとよい(シュレーディンガーはこういう種類の問題を考えなかったが)。電子を表わす波がポテンシャルの山にあたると反射波と透過波にわかれるが、そこで電子の位置を観測して、たとえば透過波のなかに見出されたとすると、(35)その途端に反射波は消滅し、波は非因果的に縮んでしまわねばならない。このような変化は、波が電荷やエネルギーをになった実在的なものだとすると、はなはだ不可解である(なお第9章にのべる回折実験参照)。

同様の困難は、他の量――たとえばエネルギーや角運動量――についてもいえることである。(8-14) 式の固有解として得られる定常状態 ψ_1,

---

(34) シュレーディンガーは振動子の場合について波束がくずれないことを示したが、これはフック・ポテンシャルの場合の特殊事情である。この難点は老ローレンツにより、またハイゼンベルクにより指摘された。

(35) この例は光を半透明鏡でわけた場合についてアインシュタインのあげたものと同じである。

ψ_2, ……ではたしかにエネルギーは E_1, E_2, …… なるとびとびの値のどれかをとる。ところが、これらを任意に重ねたもの（たとえば波束）も系の可能な状態である。逆に任意の状態ψは、定常状態を適当に重ね合わすことによってつくることができる。すなわち

$$\psi=\sum_n C_n\psi_n \qquad \text{ただし}\ C_n=\int\psi_n{}^*\psi dx \tag{8-34}$$

ところで、このような一般の状態においてエネルギーは (8-33′) によって

$$\int\psi^*\hat{H}\psi dx=\sum_n |C_n|^2E_n \tag{8-35}$$

になるはずである。ところが、実際にこの状態においてエネルギーを測ってみると、フランク－ヘルツの実験が示すように E_1, E_2, ……なるとびとびの固有値のどれかが得られ、(8-35) 式のような中間の値を得るのではない。これは、最初のψなる波がエネルギーを観測した瞬間に ψ_n のいずれか（実際にエネルギーの見出された状態）に飛躍的に収縮すべきことを意味する。

波動力学では状態の概念が流動化され、定常状態以外の状態をも同様に考えるようになり、状態の時間的変化は (8-22) により連続的に行なわれることになったので、一つの定常状態から、これととびはなれた別の定常状態への遷移というようなものも、じつはその中間の非定常状態を連続的に経過して行なわれると考えられそうである。たしかに波動関数の連続的な時間的変化というものによって、遷移というものの連続的な側面が明らかにされるのである。しかし、たとえばエネルギーが中間の値に見出されるということはなく、遷移にはやはりこのような波の飛躍的な収縮という面が残ってくるのである。

とにかくシュレーディンガーの波を実在とみなすような解釈は、そのままでは貫徹できない。ところで、もともとシュレーディンガー理論で、ψは一般的には現実空間ではなく配位空間の波であり、これをそのままで実在的な物質波と解釈することは一般にできないはずであった。

このようにψが直接観測できないような本質的に複素数の波であり、

配位空間のものであり、また突然変化するようなものであるということは、この波が古典論で光について考えた電磁場の波のようなものとは本質的に異なったレヴェルのものであることを示す。(電磁場は直接観測することができ、また突然変化することもない。) シュレーディンガーの波は、よく知られた電磁場とはちがった身分に属するものなのであり、[36] こうして量子力学の確立のためには、そういう新しい本性の波が本質的な意味をもって登場するという認識に到達することが要求されるのである。この波は、それによって電子の本質的な法則をとらえしめるところの、電子の「状態」の表現でなければならぬ。そしてこの波の突然の収縮は、――光量子の場合にも似て――電子についてもその波動性のなかに吸収されえない粒子性の面が残ることを示し、さらにまた観測に関連してなんらかの意味で不連続的・非因果的変化が登場することを示すのである。

ここでひるがえって、もう一度最初の1体問題シュレーディンガー方程式に対応する物質場の立場を考えなおしておこう。シュレーディンガーの理論は、なんら行列力学的な意味での量子化という手続きをやらないでとびとびの量子状態を導き出し、量子数を波の節の数として自然に出すことができた。しかし、そのかわり電子数が1個ということに対応して、波の振幅を $\int|\psi|^2 dx=1$ に限定するというようなことをやった。もともと波動場に電子の"数"というような性質はなかったのである。それでこれを付与するために、このような一種の"量子条件"を ad hoc に付加したわけである。この条件は前の $\tilde{\psi}$ を用いるならば

(36) シュレーディンガーの波は一種の確率振幅、すなわち変換関数であるのに対し、マックスウェルの波は物理量の場であることが、やがてはっきりとらえられるようになる(後章参照)。

(37) これは、電子に対するものとしては、それが排他律に従うということを顧慮して行なわれる必要がある。その結果、各量子状態にある電子は1個または0個のいずれかということになる。この方法では、波の量子化の結果としてドブロイの関係 $E=\hbar\omega$ が出てくる(第13章参照)。

$$\int |\tilde{\varphi}|^2 dx = \hbar \tag{8-36}$$

と書かれ、それが一種の“量子化”であることがよりはっきりする。この意味では、このような1電子物質場の理論は軌道運動に量子条件を付加したボーア理論と似た段階にあるといえる。それで、いまわれわれは、むしろこのような振幅に対する条件をはずすことにしてみる。すると、シュレーディンガー理論は純粋な古典物質場の理論となる。このような古典的実在的波動場をもっと合理的な方法で量子化するならば、その結果として電子[37]の数というものが一種の量子数として出てくることがのちに認識される。この意味でドブロイ－シュレーディンガーの波は、量子力学的状態の表現としての**状態ベクトル**（第9・10章参照）と、いずれは量子化されるべき**波動場**という二つの別個の本質的な概念に分化してゆくべきものであったということができる。

第９章　波動力学の進展と確率的意味づけ

§9・1　波動関数の確率的意味づけ

「三者論文」によって行列力学が成立した直後から出はじめたシュレーディンガーの理論は、二度目の大突破であった。その影響は燎原の火のように拡がりはじめた。この理論は行列力学においてかくされていた側面を提示し、新しい展望をひらいた。それは簡単な問題について行列力学と同じ結果を与えたが、行列力学であつかえなかったような種類の問題にも広汎に進出してそれを処理できるようなポテンシャリティをもつことを期待させるものであった。この波動力学は、行列力学の人々——ボルン、パウリ、ハイゼンベルク、ディラック——に、それぞれちがった仕方で大きな衝撃を与えた。そしてシュレーディンガーの仕事がシリーズ第４報をもって一段落した直後から、ほかならぬ彼らがいまや波動力学の本質的な展開についての主導権をとることになる。

その第一は、波動力学をより現実的な物理的問題を解決するものへと展開していくことであり、この面ですぐになされた最も本質的な進歩として、ボルンの衝突理論、ハイゼンベルクの He 原子の理論、ディラックによる新しい統計の波動力学への統合と時間による摂動論があげられる。これらの進歩は、波動力学がミクロの世界の現実的な諸問題に対処していくためにはぜひとも必要なことであり、以後の大きな展開の出発点を与えた。

第二は、行列力学と波動力学を融合することによって両者を包含するような、より一般的で、より完全な理論体系としての「量子力学」をうちたてる作業である。この作業はシュレーディンガーによる両者の数学的「同等性の証明」によっていちはやく開始されてはいたが、次にのべ

るボルンの波動関数の確率的意味づけを媒介にしてもっと深く展開されて、ディラック－ヨルダンの「変換理論」に達することではたされる。

第三は、理論の物理的解釈の問題である。元来アインシュタインによる光の二重性、ボーアによる量子遷移と遷移確率以来、さらにはドブロイによる電子の二重性、ハイゼンベルクによる原子内電子の軌道運動の否定以来、量子論の解釈にかかわる問題はたえずますます深刻さを増し、重要な争点としてつきまとってきていたが[(1)]、いまやシュレーディンガー理論の登場によって問題は鋭く緊急なものとなった。

シュレーディンガーの波動力学は成功を収めたが、肝心の波動関数の物理的意味については、先にのべたシュレーディンガー流の見方はそのままでは受け入れがたいものであって、ハイゼンベルクとボーアがこれを手きびしく批判したことはすでにのべた。とはいえ、波動力学は量子過程に直観的な描像を与えており、これをそのままリアルなものと解することはできないにせよ、だからといってこれを単に無意味なものというべきでない。波動力学は単に描像の放棄を主張した行列学派に対して、彼らの理論の直観的内容を再考することをせまるものである。行列力学も波動力学もまだそのままでは量子力学の体系の一部または一面にすぎないので、それぞれの形式に密着したような解釈を直ちにとると、いろいろの欠陥や困難があらわれることはすでにみたとおりである。まず波動関数に対するシュレーディンガーの荷電雲的な解釈に対抗して、ボルンの“確率的解釈”があらわれる。そして、これを一般化して数学形式と観測事実との間の翻訳関係を完備させていくことが「変換理論」によってはたされたのち、ハイゼンベルクとボーアが観測に関する批判的な分析を通じて「不確定性」と「相補性」にもとづく量子力学のコンシステントな解釈に達することになる。

上にあげたいろんな進展は、シュレーディンガーの仕事が一段落した1926年のなかごろから以後の約1年間の間にはたされた。そして変換理

(1) 光量子の実在に関するアインシュタインとプランクの対立、光量子および遷移確率の解釈に関するアインシュタインとボーアの対立については前にのべた。

論と相補性という二つの柱によって、量子力学のコンシステントでコンプリートな把握が得られるに至り、1927年のなかごろには量子力学は確立したとみてよい状況に達するわけである。この1年間は量子力学形成史におけるクライマックスである。以下の二章で「変換理論」に至る進展についてのべ、ついで第11章で解釈問題についてのべる。実際の物理的問題にかかわる量子力学の発展は本章と第12章で少しくふれる。

量子力学の形成のドラマの主役はハイゼンベルク、シュレーディンガー、ディラックであり、この三人は1933年ころノーベル賞をうけることになる。ほかに行列力学を推進したボルンがいるが、彼は確率解釈の仕事でその28年後（1954年）にやっとノーベル賞をうける。パウリはこのドラマに脇役的であるが、その批判的な力によって、いつのまにか主役なみの重みをもつ傾向があり、また量子力学形成時舞台の背後にしりぞいていたボーアは解釈問題において主導権をにぎることになる。

さてシュレーディンガーの波が何を表わしているのかということについて、物質場の解釈はある程度まで合理的な面をもっているが、そのままではとても維持できないことをみた。この波がなんであるかを明らかにするには、波が観測とどういう関係にあるかをしらべるべきであり、それには実験事実によらねばならない。

ハイゼンベルクらにおいて主題となったスペクトル現象は、エネルギー準位や原子内電子の位置ないし運動量という量のエネルギー固有状態についての行列要素に関するものであったから、波動関数の形というものは直接的な形では実験事実に顔を出していなかった。ところがシュレーディンガーの理論のすぐれた一つの点は、このような原子内に閉じこめられた電子の問題のみならず、自由な空間に出てきた電子の運動など、一般に‘非周期的’運動、非定常な運動をもあつかえることであった。そのような場合には、電子の波をなんらかより直接的に実験的にしらべうるから、そのような場合からして波動関数の物理的意味を明らかにできるはずである。つまり原子による電子の散乱のような問題をあつかってみることである。しかしシュレーディンガー自身は、もっぱらスペク

トルと分散の問題をあつかい、そのような問題に進もうとはしなかった。それは、彼が従来の量子論の一般的な問題提起の影響下にあったことを示している。

もともと荷電粒子の散乱の問題は実験的に重要であり、かつて古典論を用いて J.J. トムソン、ラザフォード、ボーアらによってあつかわれてきたものだが、ボーア理論以後、前期量子論が主として光の放出・吸収・散乱の問題を主題として成長していくあいだ、この問題は放置されていた。ついで登場した行列力学も、荷電粒子の散乱のあつかいには適していなかった。ところがシュレーディンガーの波動力学は、この問題にちょうどおあつらえむきである。実際、波の散乱というのは、数学的にはレーリー以来親しまれてきた波動論の問題である。

ボルンはフランクの同僚として、原子による電子の散乱をなんとか量子論的にあつかう方法をさがし求めていたので、シュレーディンガーの理論が出るや、これをこの現象に適用することを思いたった。ところが他面、散乱の問題において、電子は最終的には粒子として観測されるわけで、シュレーディンガーの波動一元論的解釈はとうてい受け入れがたいのである。それで彼は、粒子性と波動性を確率を介して融和させる考えに導かれることになった。

彼は電子と原子との間に相互作用のポテンシャルを仮定し、シュレーディンガー方程式によって遠方での散乱波を計算した。(そのさい彼は、定常波の方法と時間による摂動の方法——いわゆる“ボルン近似”——の両方を与えている。) そうして「散乱振幅」の絶対値の二乗が、電子が各方向に散乱される確率を意味すると解釈した (1926年7月)。彼は弾性散乱とともに非弾性散乱をもあつかっている。

この解釈は自然な仕方で拡張していくことができる。まえに物質場の立場では一般の状態ψにおける系のエネルギーが (8-33′) で、また分布密度が$|\psi|^2$で与えられると考えた。このことは対応論的要求によるものであったから、新しい解釈においても尊重されねばならない。そのためには、これを「平均の」エネルギー、「平均の」分布密度を表わすものと解釈し直せばよい。すなわち新しい解釈では (8-35) がψなる状態に

おける平均のエネルギーとなる。そのためには (8-35) における重ね合わせの係数 C_n の絶対値の二乗 $|C_n|^2$ を、ψ の状態で電子が E_n なるエネルギー値をとる確率[(2)]とみればよい。また位置については、電子は x なる点に $|\psi(x)|^2$ の確率（密度）で存在するとみればよい。重要なことは、シュレーディンガーのように波を単一の系の“励起強度”を与えるものとみる立場から、アンサンブルについての“相対頻度”を与えるものとみる立場へ転換した点である。

このような確率的解釈では、電子は、物質場の解釈におけるように雲のように拡がっているのではなくて、いろんな確率で各点にくるとみる。したがって電子の正体は、とにかく粒子だと考えることになる。またエネルギーはいろいろの固有値をいろいろの確率でとる。そしてこれは、粒子としての電子に荷なわれているものであるからには、物質場の立場で考えた場合のように連続的に空間に分布するのではない。

こうして ψ は、その状態において粒子である電子が位置とかエネルギーなどの量のいろんな値を確率的にとるその仕方を統一的に与えるもので、ψ はシュレーディンガー方程式に従って因果的に変化するが、それ自身としてはエネルギーや運動量を荷なわぬ配位空間の複素数の波であり、「幽霊場」ともいうべきものとなる。また ψ（あるいは C_n も）はその絶対値の二乗が確率を与える量だから「確率振幅」ともよぶべきものとなる。このようにして波動関数に対してシュレーディンガーの波動一元論的・因果的解釈を粒子に対する確率波という解釈に置き換えることによって、前者について前節でのべたような困難はすべて一応解消する。ψ が複素数で配位空間の量であることも、波束の拡散することも、もはやなんら困難を意味しない。また、この解釈では、ψ の絶対的な強度というものは意味がなく、したがって規格化して考えてよい[(3)]。

---

(2) このことは、定常状態のシュレーディンガー方程式 (8-14) の固有解 ψ_n は粒子が確実に（確率 1 で）一定のエネルギー値 E_n をとる状態だということとコンシステントである。

(3) シュレーディンガーに‘やられた’ボルンは、この散乱理論と確率解釈で一矢をむくいたというところである。

波動関数に対するこのボルンの新しい解釈は、わりあい常識的なものであり、受け入れやすいものである。かつてアインシュタインはマックスウェル場をその強度が光量子の存在確率密度を与える幽霊場として解しようとしたが、ボルンは自分の解釈はそれから示唆されたものだといっている。しかし、確率の意味についてはよく考えてみる必要がある。いまの場合、重要なことは、確率が本来たくさんの電子の集まりについてではなく、むしろ1個の電子について同じ条件のもとで同じ測定をくりかえしたとき、それぞれの値がばらついて得られる頻度を意味するということである。

ボルンはまた、波動力学の数学的スキームはもはや完全なものと考えられるので、その確率解釈における確率は、統計力学に登場する確率とは意義を異にし、いわば究極的なもの（隠れたパラメターをもたない）とみた。前にみたように量子論においては、一般に個々の過程についての因果的な決定論を否定してむしろ法則を確率的なものとみようとする考え方は、すでに対応原理の立場からする遷移確率のとらえ方や、ボーアークラマースースレーターの仮想場の理論などに底流として出没してきたものであり、いまボルンの見方もこの線につながっているわけである。

行列力学に至るハイゼンベルクらのコースにおいては、まず遷移の振幅という意味をもつ量に対して理論的スキームがたてられ、あとでこれが数学的に行列の非対角要素であることがみとめられた。これに対して波動力学のコースでは、逆にまず物理的意味のはっきりしない波動関数に対して数学的スキームがたてられ、あとで、いまこれが確率振幅と解釈されることになったわけである。

ところで、すでにシュレーディンガーが明らかにしている波動力学と行列力学との数学的関係により、行列要素が（8-19）式のように波動関数を用いて表わされることがわかっているが、行列力学においてはすでに行列要素の絶対値の二乗が（対応原理にうったえることによって）遷移確率を与えるものと仮定している。このことがらは波動関数に対するボルンの確率解釈とよく調和するものであり、それで基礎づけられるよ

うなものであることが予想されるが、このことは実際ディラックによって示された（1926年8月）。彼は輻射場が外場として作用したときの時間によるシュレーディンガー方程式を（時間による）摂動の近似法であつかい、その結果を波動関数のボルン解釈で解することによって、ボーアの振動数条件および誘導放出と吸収の遷移確率に対するアインシュタイン係数 B_{nm} を導き出した[4]。つまり、このあつかいでは、光を表わす振動する外力ポテンシャルの影響によって、原子内電子が一つの定常状態から次第にそれと他の定常状態との重なった状態へと移っていく結果に確率解釈を適用して遷移確率を得るわけだから、問題はシュタルク効果とかクーロン散乱などと（いまは系のエネルギーが保存しないことを別として）とりあつかいの上でもはや本質的な差はないわけである。このディラックの理論は、原子による光の放出・吸収の問題に対する従来の単なる行列力学的あつかい——それは対応原理に依存したアンザッツをおいている——や、また先のシュレーディンガーの半古典的あつかいとはちがって、この問題を純粋に量子力学的にとりあつかう軌道にのせたものといえる[5]。ただ、この段階では、まだ原子が反作用すべき相手である電磁場を自由度としてあつかっていない——つまり受け皿がない——ので、自発放出を導く余地はなかった[6]。

ディラックの方法は一般的な性格をもっている。すなわち、外から働く一般的な摂動の場合について、やはり時間によるシュレーディンガー

（4） ヴェンツェルは同様にして光電効果の断面積を算出した（1926）。

（5） この方法は、輻射を古典的にあつかっている点でまだ完全に量子力学的ではないのだが、それによって誘導放出と吸収に関する限り正しい結果が得られたのは次の理由による。このようなあつかいは、強い光（すなわち多数の光量子）の場合、対応原理的理由によって正しい結果を与えるはずである。ところが、いま時間によるシュレーディンガー方程式は外場ポテンシャルに関して線型であることと、電磁場が振動子的であることとによって、同じ結果が弱い光の場合にまでそのまま外挿しうる。

（6） 自発放出をあつかうためには、輻射場を原子と対等な量子力学的系とみなしたうえで、その全体系の状態の変化を波動力学的にあつかうことに進まねばならないが、これものちにディラックによってはたされる（第14章参照）。

方程式を（時間による）摂動論であつかい、ボルン解釈で考えることによって、そのさいの遷移振幅が計算され同定されうることになった（ボルン1926年10月）。そして結局、一般に摂動のハミルトニアンH'の行列要素がまさに遷移振幅という意味をもち、それから遷移確率に対する公式を得ることになる。〔少しのちにディラックが与えた形は

$$W_{nm}=\frac{2\pi}{\hbar}|H'_{nm}|^2\rho_m(E) \tag{9-1}$$

である。ここに $\rho_m(E)$ は終状態の状態密度。ハイゼンベルクの行列力学で仮定された自発放出の遷移確率の式（5-8）も、じつは（9-1）の一つの場合にほかならないということがわかる。（9-1）はのちにフェルミによって「黄金則」とよばれるようになる。〕

とにかくディラックやボルンの仕事によって、波動力学が非定常状態を包括しているということの物理的意義もまたいっそう明白になった。すなわち、まさにそのことによって、波動力学は固有値問題と遷移を同一の理論的基礎からひき出すことを可能にしているのである。[7]

また同様の方法によって、前期量子論で重要な役割をはたしたエーレンフェストの断熱原理に相当することがらも証明される。つまり摂動が非常に緩慢に変化する断熱的極限では遷移確率が消えることがわかる。こうして前期量子論では、きりはなされた別個の仮設であった断熱原理と遷移確率の法則もまた、波動力学では同じ基礎から導かれることになった。

とにかく波動力学は波動関数の確率的意味づけを通じて、もともと粒子的な立場から出発したものであった行列力学との概念上の統一を可能にする見通しがついてきた。この統一を完全なものにするには、電子の位置とか速度の値というようなものを問題にできるように行列力学を一般化する必要があり、他方、波動力学においても、位置とエネルギー以

（7） ただし、連続スペクトルに属する定常状態の方法で適当な境界条件をおくことによって、散乱の遷移確率を計算することも可能である。この方法はボルンの衝突理論においてすでに使われているが、のちにもっと明らかにされる。

外の粒子的諸量（速度、角運動量など）をすべて同様に問題にできるように、この確率的解釈を拡張していく必要がある。波動関数が単に位置とエネルギーだけの確率を与えるというのでは、理論の解釈として任意性が残っていることになり、波動力学が数学的にはもはや完全なスキームであるという信念にてらして不満なことである。波動関数が実際、系に関するすべての物理量についての確率的予言を与えるべきものであり、その意味で任意性を許す余地のないものであるという見方は、ひきつづき「変換理論」によって追求される（第10章参照）。

なお確率解釈の立場からふりかえるならば、波動力学がなぜさしあたり非相対論的な理論として成立せざるをえなかったかの理由が次のように説明できることになる。確率解釈が可能であったのは正確定（0を含む）で'微分保存則'（8-23）をみたす確率密度 $\rho(x,t)$ が定義できたことによるが、このことはシュレーディンガー方程式（8-22）が時間 t につき1階であったおかげである。相対論的なスカラー波動方程式（7-21）は t について2階であって[(8)]、微分保存則をみたし正しいローレンツ変換性をもった密度量はいぜん存在するけれども、それはもはや正確定でありえない。

§9・2　電子の波動性の実証

こうして波動力学が建設され進展していくにつれ、電子の波動性は理論的には次第に強固になってきたが、そのたしかな実証は1927年はじめになってようやくはたされた。前に、ダヴィソン－クンスマン（1923）が白金板に電子線をあてた実験にみられた凹凸を、エルザッサーが電子の波動性の現われと解したことをのべたが、これはあまり決定的なものとみなされなかった。その後、電子の波動性を実証しようとする意図をもつ実験がぼつぼつ試みられだしたが、きめ手になるような結果はすぐには得られなかった。ところが1927年に至り、ダヴィソンとガーマー L. H.

---

(8)　シュレーディンガーがはじめにあげた波動方程式（8-20）も、t について2階であるため不適当だったのである。

Germer は、前と同様の実験をニッケルの単結晶について行ない、もっとあざやかな規則正しい極大極小をもたらしたのである。ダヴィソンらは100ボルト前後の遅い電子線を用いたから、その波長はオングストローム程度つまり普通のX線の波長と同程度であった。彼らは電子のエネルギーを変化させて、実際 (7–22) の関係が成り立っていることを確かめた。[(9)]

このような遅い電子線は、X線と反対に透過能がきわめて小さく、結晶表面のわずかのよごれで影響されるなどの理由でその実験技術がむつかしい。[(10)] しかし速い電子線を用い、薄膜を通過させると、実験はずっと容易でX線の場合と似た干渉縞が写真にとれることがアバディーン大学にいたトムソン G. P. Thomson やわが国の菊池正士によって示された。

なおドブロイの物質の粒子－波動の二重性の関係 (7–8) (7–10) は、粒子の特性（質量、荷電、統計性など）によらない量子力学の一般原理であることを前に強調したが、実際、のちになって陽子や中性子についても、この同じ関係に従う波動性が実証されることになる。

X線についても、その波動性は最初結晶格子による回折によって実証された。しかしのちになって、幾何学的な道具で干渉縞を得ることも可能になった。電子線について幾何学的な道具による干渉縞を得ることは、ルップ E. Rupp が早く成功を伝えた。これは当時よく引用されていたが、その後いんちきであることが暴露された。しかし、のちに (1943) ベルシュ H. Boersch は、幾何学的な縁によるフレネル干渉縞といって

---

(9) こうしてドブロイの第二の関係 (7–10) は直接的に実証されたが、第一の関係 (7–8) のほうは直接的に実証はされない（位相速度 $\lambda\omega$ を測ることはできない）。しかし、これはたとえば前述のように、第二関係と波束の群速度と粒子の速度との一致ということから要求される。

(10) 上田良二は「ダヴィソンらが、最初に遅い電子線についての実験で成功したということはまことに驚異的で、その当時急速な発達をとげつつあった電子管工業の背景なしには考え及ばぬことである」とのべている（同氏著『粒子線回折』参照）。ダヴィソンらは、ニューヨークのベル電話研究所のメンバーである。ちなみにアメリカは量子論の形成期に理論の面では後進国であったが、実験の面では多くの重要な寄与をしたことになる。

よいものをきわめて鮮明に得ていることを付記しておく。[11]

ラムザウアー散乱や電子回折は電子の弾性散乱の過程であって、このような実験では電子の波動性がいわば純粋な形で現われることは、X線の干渉性散乱（X線回折）の場合と同様であった。この場合、散乱波は入射波と位相のつながった波であり、したがって散乱波は相互に干渉的（コヒーレント）であり回折を生じる。これに対して非弾性散乱では、散乱体はエネルギーと運動量の別の状態に遷移し、この遷移が観測されるような実験条件のもとにある限り、散乱される光や電子は干渉性を失い、その粒子的な面が顕著に現われることになる（第11章参照）。コンプトン－サイモンの実験が光の粒子性を示したように、霧箱における電子の飛跡――これは電子が空気分子をイオン化する一種の非弾性散乱である――は電子の粒子性を示したのである（後者は電子の位置の測定の一種とみなしうる）。

電子回折の現象は定性的にはドブロイの理論で理解されるが、これを完全にあつかい、極大極小の方向だけでなく強度分布まで説明するには、電子の波とX線とで原子との相互作用の性質が異なることを考慮せねばならぬ。これはシュレーディンガーの理論によって可能になる。ラムザウアー散乱についても同様である。そして、そのさいにも波動関数のボルン解釈が有効である。この場合、回折縞の強度分布――それは出てくる電子線をたとえば螢光板で受けたとして、その螢光の強度分布として観測される――は、そこでの（波動力学によって計算される）波動関数ψを用いて$|\psi|^2$に比例することが確かめられる。しかし、1個の電子に相当する弱い電子線を送るときは何が見られるであろうか？　もし各電子が純粋な波であるならば、それが螢光板上に到着するときにマクロの拡がりをもつところの干渉縞の全体が一時に見られるべきであろう。

---

(11)　便利に使える電子線の波長はX線よりさらに短いので、このような方法で干渉縞を見ることはむつかしかったわけであるが、彼は照射線の平行性をきわめて良くし、生じたフレネルの干渉縞を電子顕微鏡の方法で20万倍程度に拡大することによって、これを見たわけである。

(ただし、それは非常に弱く――いな、そのようなものに対して螢光板は反応しないだろうから――実際は何も見えぬだろう。)ところが、実際はスクリーン上のどこか一点が光り、そこに1個の“粒子”としての電子が到着したことを示すのである。電子をつぎつぎに送ると、そのたびにいろいろの点が光り、十分長くこの実験をつづけると、光る点の数の分布密度がちょうど――強い電子線の場合と同様 $|\psi|^2$ に合致するようになることが確かめられる。

この場合、個々の電子がどこにくるかは予測できず、ただ、たくさんの電子について分布が $|\psi|^2$ に比例することがいえるのである。このような事情は、前に発光などの場合の遷移の頻度に関して遭遇したと同様の統計法則が再びここに登場してくることを示している。それは、1個の電子についていえば、それがスクリーン上のある点をうつ確率が $|\psi|^2$ なのだということになるわけで、確率解釈は自然なものである。

波動関数の確率解釈は散乱の強度を記述するだけでなく、同時に原子内電子の確率分布についても合理的なものである。X線の散乱の実験から原子内電子の分布密度をきめることができるが[(12)]、それは $|\psi(x)|^2$ として与えられるものと合うことが確かめられる。(もっとも、このことだけなら電子の分布密度をシュレーディンガー流の荷電雲のように解釈してもかまわないわけである。)

§9・3 ボルン解釈の難点

確率的解釈は以前から量子論に多かれ少なかれ入っていたもので、そう目新しいものでないということもあり、ボルンの解釈は多くの人々に実用的なものとして受け入れられた。しかしハイゼンベルクやボーアは、これで本当に満足な解釈が達せられたとはみなかった。

この方式で波動関数から確率を得ることは実験事実と合致するものであるが、ボルンの確率的解釈そのものは十分なものではなく、内面的困

---

(12) 同じ種類の実験でかつて J.J. トムソンが原子内電子の数を推定したことをのべたが、いまやもっと立ち入った知見(密度分布)が得られるわけである。

難を含んでいる。それは、電子が各瞬間に位置やエネルギーなどの粒子的諸量の確定した値をもつことを暗黙のうちに認めたうえで、ただそれが個々の場合については偶然的であり、同じ波動関数で表わされる状態をたくさん準備したものについて統計的な法則性が出てくるとしている。このような考え方では、しかし電子の状態とか確率とかいう考えそのものがあいまいになる。

そしてボルン解釈で電子の粒子－波動の二重性のディレンマが解消したかというと、そうはいかない。この解釈では確定した粒子的諸量を荷なうものとして、結局（観測とは無関係に存在する）粒子の像を暗黙のうちにもちこんでいるので、物質場の場合とはまた別の矛盾をもたざるをえない。

前節で弱い電子線による干渉縞の観察について確率的解釈を説明したが、ボルン的な確率的解釈が粒子的な像にもとづいて考えられている以上は、じつはそれは干渉というような本来波に特有な現象を矛盾なく説明しえないものなのである。第3章で二つの穴による光の回折の実験が単なる光量子説の立場で理解しえないことをのべたが、これとまったく同様の困難が、そのままこの場合にも存在することになるからである。(13)

光の二重性のディレンマの場合、光量子を導く確率波という式の解釈は、困難を解決するものではなかった。電子についても、その波動性ということは電子線の干渉や回折に現われているものであり、単に粒子の存在確率を導く波という以上の、電子の本性にかかわる意味をもつとみ

---

(13) 二つの穴による干渉縞は実験されてはいないが、普通の結晶格子による回折縞でも事情は同じである。幾何学的な装置といってもよいもので回折縞をつくらせることも実現できることについては前節参照。二つの穴の干渉縞の強度分布がおのおのの穴の回折パターンの強度分布の和にならないことを、電子を本質的に粒子と考える立場でなんとか説明するために、電子に複雑な運動を想定してみることも考えられるかもしれない。たとえば電子が上の穴を通りぬけてから下の穴を通りぬけて帰り再び上の穴をぬけてゆくとか、あるいは下の穴を閉じることが上の穴の近所での運動になんらか影響を与えるとか。しかし、これらの考えはいずれも複雑で作為的なだけでなく、結局矛盾をもたらす。

なければならない。ことに、もし確率的にもせよ、個別のケースについては粒子が位置と同様に運動量も確定した値をもつとするならば、結局は一度ハイゼンベルクが否定した軌道運動の描像を密輸入することになろう。

この立場では、また波動力学に特徴的な多くの効果において、個々の場合においてはエネルギーや運動量の保存則は破れることになろう。たとえば波がポテンシャルの山をぬけ出るというトンネル効果において、粒子が確率的にもせよ自分の運動エネルギーよりも高いポテンシャルの山を越えうるからである。同様に、あるポテンシャル場で束縛されたある定常状態を考えると、このような見方では、粒子の運動エネルギーが負になるような領域でも存在確率が消えないことになる。

ハイゼンベルクの最初の論文では、粒子について古典的概念を全面的に放棄しようとした。それは行きすぎだったけれども、ボルンの解釈では古典的観点からの脱却が十分でない。矛盾をさけるには、電子のようなものについて同時に確定した位置と運動量をもった粒子という古典的概念をはっきり否定することが必要だったのである（第11章参照）。

以上のべたように、ボルンの確率解釈は内面的困難を含んでいる。にもかかわらず、それは“結果としては”正しいようなものであろう。この解釈によって理論の与えるところは事実と合致し、プラグマチックにはまったく有効なのである。

§9・4　波動力学の進展

確率解釈をともなったボルンの散乱理論は、それによって物質粒子の衝突の問題の量子力学的あつかいを切りひらいたという面でも重要な意義をもっている。前期量子論のあいだほとんど進歩のなかったこの問題が、いまや波動力学にもとづいてあつかえるようになり、粒子の衝突の古典論は全面的に書き直され再計算されることになり、古典論からのずれのおこり方も明確にされるに至った。ボルン自身の論文はすでにフランク－ヘルツの非弾性散乱での閾（しきい）値の存在の事実を説明していた。ヴェンツェルはボルン理論をクーロン場による散乱の場合に適用したが、こ

の場合、波動力学的計算は断面積に対して古典的なラザフォードの式と合致する結果を与えることが見出された。(したがって、そこには$\hbar$が顔を出さないのである。)[14] ともかくこの結果は、シュレーディンガー理論が粒子の散乱の問題についても実験と合うことを示した早い例を与えた。

さらに以後、散乱理論はディラック、モット N. Mott、ファクセン H. Faxén、ホルツマーク J. Holtzmark[15]、ベーテ H. Bethe らの手によって展開され、ラムザウアー効果や電子回折の実験の定量的説明も順次はたされるようになる。一般に粒子の衝突・散乱の理論は、さらに幅広く展開され、以後の量子力学のなかで大きな分野となっていくのである。[16]

さてシュレーディンガーの理論が登場したとき、これでうまくあつかえる問題として人々が早く気づいた重要な事柄には、すでにふれた散乱理論および遷移確率の問題のほかに、もう一つ同種粒子(これは個別性をもたない)の多体問題がある。そのティピカルなケースは He 原子のような2電子問題である。波動力学では一般に二粒子(ないし多粒子)問題への拡張は配位空間のシュレーディンガー方程式としてスムースにはたされることを前にのべたが、ハイゼンベルクはさらにここにスピンと排他律をとり入れた。彼は排他律を粒子のいれかえに対する全波動関数の反対称性としてとらえ、He 原子における2電子間の“交換相互作用”を導いた。一方、同じころディラックは、同種粒子の系についての

---

(14) この場合、計算を相対論的にやっても、やはり断面積の結果に$\hbar$は出てこない。これはクーロン力の特殊事情である。

(15) ファクセン-ホルツマーク(1927)は散乱の微分断面積を各“部分波”に対する“位相のずれ”を用いて表わす有名な公式を導いた。彼らはこれを用いてラムザウアー効果を説明した。

(16) ことに、のちに量子力学が原子核や素粒子の領域へと適用されていくにつれてその比重が増し、散乱をあつかういろんな方法が発展することになる。のみならず、散乱振幅ないし“S行列”を量子力学の理論構成自体の中心にすえようとする方向さえ出てくることになる(第14章参照)。

ボース統計、フェルミ統計が波動力学の枠組にうまく統合されることを示した（第12章参照)。

とにかく前期量子論がいかに多く量子力学的結果を——とくに分光学的領域で——先取りしていたとはいえ、それで説明できないような謎もたくさんあった。そういう効果のなかには本質的には物質の単純な波動性だけで説明されるようなものもある（電子回折、トンネル効果など）が、むしろその大部分はスピンと排他律を統合した波動力学によってはじめて理解されるものだったのである。こうして、上記のハイゼンベルクやディラックの仕事（スピン・排他律・統計性の波動力学への統合）は、それにもとづいた波動力学の展開が実際問題の解決にその後ますます偉力を発揮することになるという意味で、非常に重要である。しかも、それは他方では波動力学自体の重要な形式的発展をうながすことになるという意味をももっているのである（第13章参照)。

ところで He 原子の問題は、前にのべたように前期量子論で理論的にも実際上にも解決しなかったものであって——水素原子にもまして——波動力学の試金石という意味をもつものだったわけで、この問題に関しては上記のハイゼンベルクの仕事によって解明された面のほかにもう一つの側面がある。それはそのエネルギー準位などについて波動力学による結果が実験値とどこまで定量的に合うかという問題である。これについてはヒレラス E. A. Hylleraas らがリッツの変分法による近似を進めていったところ一致がますますよくなっていくことがわかり、このことは波動力学が数学的に正確なものであるということの信用を高めた。

He からすすんで一般の多電子原子については、ハートリー D. R. Hartree の自己無撞着場による“1体近似”の立場においてスピンと排他律を考慮するという定性的なあつかいで、原子の「殻状構造」をあらためて基礎づけることができる。総じて原子の問題が前期量子論でかなり解明されたということは、原子にあっては平均的な中心力場における電子“軌道関数”による1体近似が量子力学的に‘第零近似’の意味で妥当なものであったことによっていることが認識された。

一方、分子の問題が前期量子論でほとんど解明されなかったのは、波

動力学的にみてここでは原子の場合ほど適切な第零近似の電子軌道関数がないことと関係がある。しかし波動力学によって、ブラウ Ø. Burrau (1927) が、かつてパウリが失敗した水素分子イオンの結合エネルギーについて実験値とよく合う結果を出し、ついでハイトラー W. Heitler とロンドンが水素分子の共有結合を説明することに成功したことによって、波動力学にもとづく分子構造と原子価の理論がはじまることになる。

分子の場合にはまた前期量子論である程度あつかわれていた振動と回転も問題になるが、これについてもいまや波動力学にもとづくボルン－オッペンハイマーの断熱近似や、ハイゼンベルク、フント F. Hund らの等核二原子分子の理論などを出発点として、もっと正当なとりあつかいが進展することになる（第12章参照）。

第10章　行列力学と波動力学の融合

§10・1　固有値問題の一般化

行列力学について波動力学がたてられ、両者の関係がつき、また波動関数の確率解釈が一応成功しそうなことがわかってきたところで、当然より一般的な「量子力学」を定式化しようとする主題がクローズアップしてきた。そのためのモチーフとなることは、一つにはシュレーディンガーの示した行列力学と波動力学の「数学的同等性」を発展させて、両理論を形式的に統一し融合しようということであり、もう一つはボルンの波動関数の確率的意味づけを一般化することによって、系にほどこしうる任意の観測の結果について理論が答えうるように数学形式と測定値との関係を完備したものにしようということである。ここから「変換理論」への進展がなされることになる。そして、これがディラックとヨルダンによって1926年末に達成され、量子力学の体系を一応完成の域にもたらすことになる。

シュレーディンガーの理論が現われたときディラックは、これを彼の“q-数の理論”の枠組のなかに呑みこむことを試みたが、この q-数の方法は普通の行列力学よりも一般性・柔軟性があり、変換理論に到達するのに向いていた。

他方パウリは、ボルンの確率的意味づけの一般化は、任意の二つの物理量A、Bについて、Aがaなる値をもつときにBがbなる値をもつ確率が$|\Phi_{ba}|^2$であるような「確率振幅」Φ_{ba}が存在するということであり、量子力学はこれを体系的に与える理論であると予想したが、ヨルダンはこのΦ_{ba}が一般にみたすべき関係を研究することから、ディラックと同じ変換理論に達することになる。

変換理論の達成はきわめて重要であるが、内容が数学的でテクニカルな面が強いので、ここではこれを実際の歴史的手順で追うことはやめて、そこで認識されたことの要領をのべるにとどめよう。

さて行列力学では、はじめから直観的な描像の否定が意識され、波動力学では最初の物質波の描像が流産した。このような状況においては、理論形式と実験事実との翻訳関係を明確にすることが本質的な問題として自覚される。それには対応原理的な考察が役に立ったが、それだけでは十分ではない。問題は、ある状態で、ある物理量がどんな値をとるか、ということである。古典論では、これははじめから自明のことであった。古典論では、状態は物理量の組がいかなる値をとるかということで指定され、**状態**と**物理量**と**物理量の値**（測定値）とは、いわば密着した関係にあった。ところが量子力学では、物理量には行列とか演算子とかが対応し、状態は量子数で番号づけられたり、もっと具体的一般的には波動関数で表わされたりする。とにかく量子力学では物理量と状態と物理量の値との三者は明確に区別されねばならず、そのうえで三者の関係をはっきり定式化せねばならないのである。この関係がエネルギーについてはどのようなものであるかはすでに知っている。

実際、これまでは行列力学でも波動力学でもエネルギーが中心的に考えられてきた。しかし古典力学では、粒子についてエネルギーのほかに位置・運動量・角運動量などの観測可能な力学量があった。それで新しい理論においても、これらの量についても、それを観測するときどんな値が得られるかに答えうるように、処方箋を拡張してゆく必要がある。

ところが、もともと粒子の力学の対応論的な変革として形成された行列力学では、エネルギー以外の諸量も行列としては初めから理論のなかに登場していた。量の観測値は、この行列表現との間になんらかの関係をもつであろう。すでにわかっていることは、それらの量について定常状態におけるその“平均値”とかゆらぎを、それらの行列から読みとる仕方である。ある量AのゆらぎはA^2の平均値からAの平均値の自乗を引いたものであるから、要するに、それ自身平均値の一種である。そして平均値は行列の対角要素で与えられる。この関係をさらに立ち入った

ものにするには、エネルギーについてわかっている関係を他の一般の量に拡大すればよいと考えられる。

また波動力学の形式でいうと、エネルギーのとりうる値は固有値方程式（8–14）の固有値 E_n であり、さらにボルン解釈によると、一般の状態 ψ においてエネルギーは――（8–34）の展開の係数 C_n を用いて――E_n なる値を $|C_n|^2$ の確率でとった。そこで、とにかく同様の方式を他の物理量にも適用することにする。つまり次のように仮定する。

波動力学の形式でいって（かつ簡単のため１粒子系の場合についてのべることにして）、古典的に $A(x, p)$ で表わされる量には、$\hat{A}=A\left(x, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$なるエルミート演算子が対応し、これを用いてこの量の固有値と固有状態が

$$\hat{A}\psi=a'\psi \tag{10–1}$$

の解 a' と $\psi_{a'}$ としてきまること[(1)]（これは（8–14）の一般化である）、そして一般の ψ なる状態では A なる量は、ψ を $\{\psi_{a'}\}$ で展開したときの係数の絶対値の自乗の確率で各 a' なる値をとること[(2)]。

まずこの処方を運動量に適用してみるならば、運動量 p の固有値と固有状態は、p が$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ なるエルミート演算子に対応するから、

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi=p'\psi \qquad (p' \text{ は常数}) \tag{10–2}$$

なる方程式の解としてきまるということになる。ところが、これは任意の p'（運動量の固有値）に対して解をもち（“連続固有値”）、その解は平面波

$$\psi_{p'}=f(t)e^{ikx} \qquad (k=p'/\hbar) \tag{10–3}$$

---

(1)　固有値をプライムで区別する記法を用いる。$\hat{A}$ の固有値は $a', a'', a''', \cdots\cdots$ である。

(2)　ψ なる状態で A なる量の平均値が $\int\psi^*\hat{A}\psi dx$ で与えられるといってもよい。実際（10–1）をみたす解 $\psi_{a'}$ においては $\langle A^2\rangle=\langle A\rangle^2$ で、A のゆらぎはゼロであり、A は確率１で a' なる値をもつ。

で、これはまさにドブロイの関係 $\lambda=h/p'$ をみたすものになっている。ただしエネルギーの場合とちがって、運動量には系の力学的構造が反映せず、その固有値・固有関数は電子に働いている力の形などに無関係にきまってしまうのである。自由な粒子の場合には (10-3) は同時にエネルギーの固有状態にもなっており、これがシュレーディンガーの波動方程式 (8-22) をもみたすためには、ドブロイが考えた自由空間の単色平面波と同じものになる。こうして p' なる運動量の状態に $k=p'/\hbar$ なる波数の波が伴うというドブロイの最初の考えは、この理論では p が $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ なる演算子で表わされるということに、したがってより一般的には、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ との交換関係のなかにとり入れられていることがわかる。そしてボルンの確率的意味づけの拡張により、一般の状態 ψ においては、これを $\psi_{p'}$ で展開して(これはフーリエ展開にほかならない)

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{h}}\int\tilde{\psi}(p')e^{ip'x/\hbar}\,dp' \qquad (10\text{-}4)$$ [3]

と書いた係数 $\tilde{\psi}(p')$ の絶対値の二乗が、この状態で粒子の運動量が p' なる値をとる確率密度を与えることになる(このことは最初パウリが指摘した[4])。このことはまた、$\psi(x)$ の状態で p またはその関数 $G(p)$ なる力学量の平均値が

---

(3) (10-4) 式は、3次元的な場合は

$$\psi(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{h^3}}\int\tilde{\psi}(\vec{p'})e^{i\vec{p'}\vec{x}/\hbar}d^3p'$$

と書くべきである。本書ではしかし、しばしば問題を1次元的なもので代表させ、また3次元的にあつかっている場合にも3次元的な量であることを明示することを略すことがある。

(4) (10-4) は $\psi(x)$ と $\tilde{\psi}(p)$ がお互いにフーリエ変換の関係にあることを意味しており、一方がきまれば他方がきまるので、$\psi(x)$ のかわりに $\tilde{\psi}(p)$ で状態を表わすことが可能である。そのとき x に $i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$ なる演算子、一般に $A(x, p)$ なる物理量に $A\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p},\ p\right)$ なる演算子をあてがえば、固有値方程式、平均値などは、すべてもとと同じ形にとどまる。(8-18) も不変である。それで $\tilde{\psi}(p)$ 自身を状態の表示('p-表示')、しかももとの $\psi(x)$ と対等な資格をもつ表示とみなすことができる。変換理論は、このような事情をさらに一般化することに相当する。

$$<G(p)>_{\phi}=\int\phi(x)^{*}G\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\phi(x)dx$$

で与えられることだと言い直してもよい。上の処方が自然なものであることは、その結果として、任意の一つの波動関数で表わされる状態について、位置、運動量、力の平均値に関して

$$\begin{aligned}\frac{d<x_i>}{dt}&=\left\langle\frac{\partial E}{\partial p_i}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial\omega}{\partial k_i}\right\rangle=\frac{1}{m}<p_i>=<v_i>\\ \frac{d<p_i>}{dt}&=-\left\langle\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\rangle\end{aligned}\qquad(10\text{–}5)$$

なる関係（"エーレンフェストの定理"）がシュレーディンガー方程式(8–22) を用いて証明できることにある。(10–5) は、この解釈によって対応原理的関係が再び回収されることを意味する。とくに (10–5) の前者は群速度の式を含んでいる。

次に同様の方式を軌道角運動量の成分 l_z に適用してみよう。それは

$$\hat{l}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

なる演算子で表わされ[5]、その固有値・固有状態は

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\phi=l'_z\phi$$

の解としてきまるはずである。これは l'_z の

$$l'_z=m\hbar\qquad(m：整数)$$

なる値（固有値）に対してのみ1価連続な解 $\phi=f(r,\theta)e^{im\phi}$ をもつ。軌道角運動量の成分が $\hbar$ の整数倍の値しかとりえないということは、すでにゾンマーフェルトの理論において空間量子化として知られていたこととと一致する。この場合も、系の力学的構造と無関係に固有値と固有関数がきまってしまうが、スペクトルは離散的である。

このように、最初エネルギーの固有値・固有状態について考えられた(10–1) の方式をそのままの形で運動量や角運動量に適用して、従来の

(5) r、θ、ϕ は極座標である。

知識とよく調和する結果が得られることがわかった。こうして、たしかに（10–1）の処方を任意の量に当てはめてよいと考えられる。[6]

ところで、（10–1）のような一般化された確率的意味づけが成り立つためには、物理量に対応する1次演算子 $\hat{A}$ の固有関数の全体 $\{\phi_{a'}\}$（これは一般に離散スペクトルと連続スペクトルとを含む）が完全である——すなわち物理的状態に対応するような任意の波動関数 ϕ が $\{\phi_{a'}\}$ で展開できる（"展開定理"）——ということが保証されていなければならない。この"定理"は、いまあげた運動量や角運動量のような物理量についてはたしかに成り立つことを示しうるが、いろんな力学系につきいろんな物理量の場合についてそれを証明することは簡単でない。そこで、むしろこの"展開定理"をみたす演算子に対応するような物理量を、ディラックに従って"オブザーバブル"と名づけ、われわれはもっぱらこれを問題にするのだという立場をとることによって——いいかえれば"オブザーバブル"は展開定理をみたすと宣言することによって——数学的に面倒な点を分離しつつ議論を進める。

とにかくこうして初めに出した問題に、波動力学の形式を用いて、一般的な解答を与えることができた。そして実測値が演算子と波動関数とからひき出されてくるこの関係を頭におくことによって、物理量が演算子で表わされ、状態が波動関数で表わされるということがいっそう具体的な意味をもってくるようになった。波動関数は、その状態におけるもろもろの物理量について、そのとる値の確率分布を総括するものであることがわかった。

このような一般化は、じつは数学的困難を含んでいる。それは、この一般論に従えば電子の位置 x の固有値と固有状態は

---

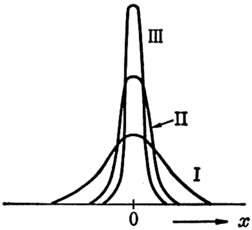
(6)（10–1）によってエネルギーのほか角運動量の大きさや z 成分などの物理量の固有値と固有状態が得られるということは、水素原子の場合について定常状態のシュレーディンガー方程式を極座標で解いて固有関数を求める手続きを古い量子論におけるゾンマーフェルトの量子状態を得る手続きと比較することにより、自然に思いつくことである。

$$x\psi(x)=x'\psi(x) \tag{10-6}$$

の解として得られるはずであるが、この方程式は普通の関数をもってしてはみたされない。しかしディラックは“δ-関数”というトリックを導入してこの困難をさけた。$\delta(x)$というのは、さしあたり $x=0$ 以外のところでは 0 であるが、$x=0$ のところで無限大になって、ちょうど

$$\int\delta(x)dx=1$$

となるようなものとみなされる。そういうものは普通の関数ではありえ



ディラックの δ-関数。I, II, III……のように、下の面積が 1 になるという性質を維持しつつ、限りなくシャープにしていった極限が $\delta(x)$ である。

ないが、なにか普通の関数の列、たとえば

$$\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}e^{-\nu x^2}, \quad \frac{1}{\pi}\frac{\nu}{\nu^2x^2+1}, \quad \frac{1}{\pi}\frac{\sin\nu x}{x}$$

の（そのどれでもよい）$\nu\to\infty$ の極限とみなしうる。これを使うと、(10-6) は任意の x' に対して解

$$\psi_{x'}(x)=\delta(x-x') \tag{10-7}$$

をもつ（これも系の力学的構造にはよらない）。ψ なる状態で粒子の位置が x' なる確率は、先の一般的ルールによれば、ψ を (10-7) の集まりで展開したときの係数できまるはずであるが、この係数は

$$\int\delta(x-x')\psi(x)dx=\psi(x')$$

となるから、確率密度は $|\psi(x')|^2$ となる。こうして電子の位置について §9·1 で考えたもとのボルン解釈も、一般的ルール (10-1) の特別な

場合としてたしかに含みこまれている。

なおこの場合、固有関数の直交性と規格化は

$$\int\psi_{x'}(x)^*\psi_{x''}(x)dx=\int\delta(x-x')\delta(x-x'')dx=\delta(x'-x'') \qquad (10\text{–}8)$$

となっている。離散固有値の場合は、固有関数 $\{\psi_n(x)\}$ は「規格直交条件」

$$\int\psi_n(x)^*\psi_{n'}(x)dx=\delta_{nn'} \qquad (10\text{–}8')$$

をみたした。ところが、(10–8) は、(10–8′) の右辺でクロネッカーの $\delta_{nn'}$ をディラックの δ-関数で置き換えたものになっている。したがって、いま固有関数のノルムは $\delta(0)=\infty$ である。位置の固有関数に限らず、一般に連続固有値の場合は、このように δ-関数に規格化されるのである。

ちなみに δ-関数を用いると、固有関数の集まり $\{\psi_n(x)\}$ の“完全性”はその規格直交条件 (10–8′) で n と x の役割をいれかえた

$$\sum_n\psi_n(x)\psi_n(x')^*=\delta(x-x')$$

なる式で表わされるということを注意しておこう。

§10・2 変換理論

前節で与えた物理量と、そのとる値との間の一般的な関係は、シュレーディンガーが示した行列力学と波動力学の間の同等性の関係（§8・2参照）によって、直ちに行列力学の言葉にもどすこともできる。

エネルギーの固有値問題について、波動力学の (8–14) に対応して、行列力学の形式では (6–24)、すなわち (8–17) があったように、一般の量 A の固有値問題として波動力学の (10–1) に対応して (8–17) と同形のものが得られる。それを——(8–17) の基礎になる完全直交系 $\{\varphi_n\}$ としてある量 B の固有関数系 $\{\psi_{b'}\}$ をとった場合（すなわち最初 B が対角型にされている場合）について——書くと、

$$\sum_{b''} A_{b'b''} S_{b''a'} = a' S_{b'a'} \tag{10-9}$$

ただし　$S_{b'a'} = \int \psi^*_{b'} \psi_{a'} dx$　　(10-10)

である。このことは、Aの固有値はAの行列にユニタリー変換をほどこして、これを対角行列にもたらしたときの対角要素であることを意味する。とくにいまの場合は、このユニタリー変換は、Bを対角型にする表示からAを対角型にする表示に移すようなもので、その行列要素 $S_{b'a'}$ は (8-15) からわかるように、$\psi_{a'}$ を $\psi_{b'}$ の組で展開したときの係数に相当している。すなわち

$$\psi_{a'} = \sum_{b'} S_{b'a'} \psi_{b'} \tag{10-11}$$

ゆえに前節でのべたところからして、$|S_{b'a'}|^2$ はAが a' なる固有値をとる状態でBが b' なる値をとる確率を意味する。(7)(8) Sはユニタリー行列だから、

$$\sum_{b'} |S_{b'a'}|^2 = \sum_{a'} |S_{b'a'}|^2 = 1$$

をみたしこの確率解釈に調和している。(10-10) の $S_{b'a'} = \int \psi^*_{b'} \psi_{a'} dx$ 自身は、Aが a' なる値をとるときBが b' なる値をとる「確率振幅」であり、位相因子をもっている。(10-10) の右辺は $\psi_{a'}$ と $\psi_{b'}$ の内積とよばれる量で、$(\psi_{b'}, \psi_{a'})$ という記号でも表わされる。明らかに $(\psi_{b'}, \psi_{a'}) = (\psi_{a'}, \psi_{b'})^*$。そして (10-11) は、このユニタリー変換が関数空間で $\{\psi_{b'}\}$ をベースとする表示から $\{\psi_{a'}\}$ をベースとする表示への“回

---

(7) これは、前述のパウリの予想したボルンの確率解釈の一般化をちょうど意味している。なおディラックとヨルダンに先立ち、ハイゼンベルクは行列の対角要素が平均値であるということからして、$|S_{ba}|^2$ がaなる状態でbが見出される確率を表わすということを気づいていた。

(8) いま、簡単のため1自由度であるかのようにみてのべているが、一般の場合、くわしくは「互いに可換な物理量の完全組」をとり、その‘同時固有状態’を用いてのべねばならない。

転”に相当し、$S_{b'a'}$ がその回転係数（“方向余弦”）であることを示す。[9]
とにかく、こうして**変換関数はとりもなおさず確率振幅**であり、これが量子力学の数学的な構成においてもその物理的意味づけにおいても基本的な役割をすることがわかった。

行列力学において得られた一般化された固有値方程式（10–9）は、波動力学におけるそれ、すなわち（10–1）と似た形をもっていることが見られる。ディラックは δ–関数を用いることによって逆に微分方程式である（10–1）を（10–9）の一つの特別な場合として含みこみうることを次のように示した。(10–9）で最初の B なる量として位置 x をとったとすると、これは連続固有値 x' をもつから（10–9）は和のかわりに積分となり

$$\int A_{x'x''}S_{x''a'}dx''=a'S_{x'a'} \tag{10–12}$$

である。ところがいま x を対角型にする表示がとられているのだから、x の“行列”は

$$x_{x'x''}=x'\delta(x'-x'') \tag{10–13}$$

であり、またこの行列と正準交換関係をみたすべき p の“行列”は

$$p_{x'x''}=-i\hbar\delta'(x'-x'') \tag{10–14}$$
[10]

このように $\underline{A}(\underline{x},\underline{p})$ の引数 $\underline{x}$、$\underline{p}$ が（10–13)、(10–14）のような特別な行列であることを用いると、（10–12）なる積分方程式は、微分方程式

$$A\left(x',-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)S_{x'a'}=a'S_{x'a'} \tag{10–15}$$

---

(9) 行列力学のユニタリー変換（6–21）は、物理量を表わす行列が $\underline{A}\to\underline{S}^{-1}\underline{A}\underline{S}$ と変化することを示す。“ユニタリー変換”としてはそれとは別に座標系（すなわち基底ベクトル）は固定したままで同じ変化がおきる場合も出てくる。$\underline{A}$ の時間発展（6–16）はその一例である。

(10) このことは、この表示の基礎関数が（10–7）なることからも直ちにわかる。

に帰着することがわかる。

さらに（10–11）と（10–7）とから、

$$S_{x'a'}=\psi_{a'}(x') \qquad (10\text{–}16)$$

なることがわかるから、(10–15) はまさに (10–1) にほかならない。こうしてシュレーディンガー型の固有値方程式は、行列力学における固有値方程式を、$\underline{x}$ を対角型にする特別な表示で書いたものにほかならず、それは、$\underline{x}$ を対角型にする直交系を $\underline{A}$ を対角型にする直交系へ移すユニタリー変換の変換関数（10–16）をきめる方程式にほかならず、固有関数はこの変換関数にほかならないことがわかった。したがってまた、この $\psi_{a'}(x')$は、Aが a' なるときxが x' である確率振幅であるということになり、これはもとのボルン解釈を再現している[11]。とくに定常状態のシュレーディンガー方程式は、$\underline{x}$を対角型にする表示を、$\underline{H}$を対角型にする表示に移す変換関数をきめる式である。

このシュレーディンガーの方程式というものは1電子系の場合、現実空間における波を表わしたが、この $\psi(x)$ の変数xはじつは、むしろ電子の位置の固有値の一つ一つの値を意味するものと解すべきことになり、この点にも粒子性を含んでいるわけである。

われわれの進み方では、任意の直交関数系、たとえば $\{\psi_{b'}(x)\}$ というものから出発して物理量 A の行列要素 $A_{b'b''}$ をつくりだしたのであったが、その結果、最初の $\psi_{b'}(x)$ というもの自身の行列力学的な意味（それが変換関数 $S_{xb'}$ なること、すなわち（10–16）式）に達することができた。したがって確率振幅という量を通じて行列力学と波動力学が統一されたといってもよい。

---

(11) とくにpがp' なるときxが x' なる確率振幅はドブロイ波に相当する

$$\psi_{p'}(x')=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,e^{ip'x'/\hbar}$$

であり（いま δ-関数規格化を適用している)、その確率 $|\psi_{p'}(x')|^2$ は x' のすべての値にわたって一定となる。このような関係は、p とxのように正準共役な量の対について一般的に成り立つ。

さてBが対角型になる表示からAが対角型になる表示への変換の行列の一つの列——$S_{b'a'}$ で b' を変えたもの、その特別な場合が (10–16) である——は、前に注意したようにAの a' なる値をとる固有状態の——Bの固有状態を基礎にとった——表示という意味をもっている。もし、さらに別の量Cが対角型になる表示への変換を考えると、変換行列の間には、行列の積の規則に相当して

$$S_{c'a'}=\sum_{b'}S_{c'b'}S_{b'a'}=\sum_{b'}S^*{}_{b'c'}S_{b'a'} \tag{10–17}$$

なる関係がある。これはAが a' なる固有状態の、B の固有状態を基礎にする表示 ($S_{b'a'}$) と、Cの固有状態を基礎にする表示 ($S_{c'a'}$) との間の関係が、広い意味でのベクトルの変換に相当するものであることを示す。したがって $S_{b'a'}$、$S_{c'a'}$ などは $S_{\bullet a'}=\xi^{(a')}$ なるベクトル——それはAの a' なる固有状態を表わす——の別々の表示にすぎないものとみることもできる。B (あるいはC) の固有値 b' (あるいはc') の個数は一般に無限個あるから、このベクトルは無限次元複素空間のベクトルである。ところで、$\xi^{(a')}=S_{\bullet a'}$ がベクトルであるならば、これらの任意の線型結合もまたベクトルである。

そして波動力学において、固有状態を表わす波動関数 $\psi_{a'}$ を任意に重ね合わせたものも、もとの固有状態と同等の資格で、系の可能な状態を表わすものと考えねばならなかったということは、$\xi^{(a')}=S_{\bullet a'}$ (一つの表示でいえば$\xi^{(a')}_{b'}=S_{b'a'}$) の任意の線型結合も同じベクトル空間のベクトルであるということに対応している。

次にユニタリー行列$\underline{S}$による変換において一般に物理量を表わす行列$\underline{C}$が$\underline{C}\to\underline{S}^\dagger\,\underline{C}\,\underline{S}$ に移るということは、行列要素で書いてみるとわかるように、$\underline{C}$ の行列要素の集まりが、広い意味でのテンソルのように変換することを示す。

こうして状態はベクトルで表わされ、物理量はテンソルで表わされるということになった。こうして見直すと、Aの固有値と固有状態を定める (10–9) 式あるいは (10–12) 式 (したがって、また (10–1) 式) は、無限次元複素空間のベクトルとテンソルの間の関係として

$$AS_{\cdot a'}=a'S_{\cdot a'} \qquad \text{すなわち}\ A\xi^{(a')}=a'\xi^{(a')} \tag{10–1′}$$

として表わされる。

変換理論の達成により、行列力学と波動力学は一方から他方へ表示の変換により自由に移れる関係にあることが示され、さらに両者をその特別な表示として含む「量子力学」の抽象的・一般的形式がとらえられ、同時にまた変換関数が確率振幅の意味をもつことが一般的に明らかにされた。

この量子力学の一般理論の立場からすれば、ハイゼンベルクの最初の理論はエネルギーの固有状態をベースにとった表示であり、これに対してシュレーディンガーの理論は連続固有値をもつ位置の固有状態をベースにとった表示であったことになるが、いまやそれらに限らず問題に応じてそれに適したもっとほかの新しい表示を自由に導入しうることになる。そして物理量を表わす q–数間の代数的関係、また物理量の固有値スペクトルはベースのとり方にはよらずユニタリー変換に不変であり、また確率・平均値のような観測可能な数も、状態と物理量とを指定すれば、どのような表示を用いて計算するかにはよらず、量子力学の物理的内容は表示の変換に対して不変である。

シュレーディンガーの理論では、上記のような特定の表示のゆえに、1体問題のときに状態が実在空間の波のようにあらわれたわけであるが、これは実在的な波を意味するものではなく、むしろ状態を表示する一つの手段とみなされるべきことになった。配位空間の波についても同様である。

さて時間的変化について、行列力学では物理量を出発点におくので系の運動（時間的変化）というものもっぱら物理量に荷なわれたものとして表現されざれるをえなかった（"ハイゼンベルク描像"）（注 (9) 参照)。これに対し波動力学では状態から出発するので、時間的変化はもっぱら状態を表わす波動関数によって荷なわれるものとして表現されたわけである（"シュレーディンガー描像"）。すでにのべたように量子力学では、系の運動や物理量の平均値というような物理的な事態をとらえ

るのに、状態ベクトルと物理量演算子という二つの道具立を用いるのであり、そのため、どこまでを状態とし、どこからを物理量とするかの切れ目のとり方にユニタリー変換だけの任意性があり、量子力学の物理的内容はこのユニタリー変換に対して不変である。この切れ目の任意性のために時間発展について、そのとり方によって、状態ベクトルのみが運動するシュレーディンガー描像、物理量のみが運動するハイゼンベルク描像、さらにまたその中間のトモナガ描像などがありうることになるのであり、それらは互いに同等である。

なお、シュレーディンガー方程式が時間について1階でなければならなかったということは、シュレーディンガー描像で状態ベクトルが時間とともにユニタリー変換で動いていくという量子力学の一般原理（重畳の原理と全確率の保存）の反映であったことになり、このことは相対論的な量子力学にすすむ場合にも継承されるべきことになる。

こうして行列力学と波動力学が融合しただけでなく、両者を単につなぎ合わせ噛み合わせたものよりも、より強力で一般的で緊密な理論がうちたてられ、量子力学の全貌がいまや明らかになってきた。

変換理論によって状態が“ベクトル”としてとらえられるに至ったことはきわめて重要である。最初、状態の概念は軌道運動の描像をともなったボーアの定常状態の形で登場し、ついでそれが定常状態も非定常状態もふくむところのシュレーディンガーの配位空間の波にかわったが、いまや状態は力学系によってきまる一つの複素空間の抽象的なベクトル（より厳密には“射線”）によって表現されるようなものに一般化されるに至った。このことは状態に関して一般的な「重畳の原理」が抽出されたことを意味する。これは“確率解釈可能性の原理”ともいうべきもの（固有関数の完全性と時間発展についてのユニタリティー）とともに、量子力学の最も基本的な一般原理となる。ここまでくると、量子力学の一般原理・一般法則はもとの波動力学自身よりも、ずっと一般的な性格をおびてくる。もとの波動力学は古典的にいって外力ポテンシャルのなかの質点、ないしポテンシャルで相互作用する質点系に対する非相対論的理論としてたてられたが、この波動力学から抽象された上述のような

概念・法則・枠組はきわめて一般的なものであり、やがて着手される相対論的な量子力学といえどもこれに従わねばならないはずのものである。いずれにせよ、いまやこの量子力学の一般法則に従う力学モデルをもとのシュレーディンガー的モデルからふみ出てもっと手広く考える可能性がひらかれることになった。

これまであつかってきた古典的な質点系に対応する量子力学においては、正準交換関係 $[q_r, p_s]=i\hbar\delta_{rs}$ が基本的に重要であった。一般的な量子力学の見地からは、この q_r、p_r は、古典的にいって正準共役な量であるならば、必ずしも質点系における粒子の位置と運動量という意味のものでなくてもよく、量子力学は古典的に正準形式に書けるような（質点系以外の）モデルにも適用できる。のみならず、量子力学的モデルは、正準形式——ないし、その背後のラグランジュ形式——の存在にもとづいて正準交換関係を設定することを通じて得られるものにもはや限られない。古典的対応物をもたないような、そしてその基本的な物理量が正準交換関係をみたさないようなモデルも、一般的な量子力学の立場で直接的に考える余地が生まれてくるし、また実際それが必要でもある（スピンやフェルミ場など）。

われわれは、これまでスピンを無視した非相対論的質点系を中心に考えてきたが、量子力学を現実のミクロの世界について展開していくには、スピンや、同種粒子についての排他律ないしボース統計性などをとり入れ、さらに電磁場およびそれと電子との相互作用をすべて量子力学の枠に入れてしまうことが必要である。そのことは、すでに行列力学とシュレーディンガー理論のなかでもハイゼンベルクやディラックによりすすめられてきたわけであるが、変換理論という一般的な枠組が準備されたうえで、いまやそれはいっそう的確に遂行できることになる。かつまた、そこからさらに新しい概念的発展ももたらされることになる。

こうして量子力学の一般的スキームができれば、もとのシュレーディンガー理論をはみ出るような問題が現われてきても、あまりあわてる必要はない。たとえば粒子の数や種類が変わるような現象が現われ、これを量子力学の枠組で記述する必要がおきれば、状態をあらわすベクトル

空間をそれぞれの粒子がそれぞれ0個、1個、2個、……あるような状態をすべて含むように、必要なだけヒルベルト空間を拡げ、異なる粒子数の状態をつなぐ演算子を相互作用を表わすものとして用意すればよいであろう。あるいはまた“粒子”について、その位置はオブザーバブルといえないけれども運動量はいえるような場合（光量子など）、確率振幅の意味をもったものとしてのシュレーディンガーの $\psi(x)$ という量は存在しないが、確率振幅 $\chi(p)$ は存在し、これでつくられるベクトル空間で、その量子力学を書いていくことができるわけである。

また変換理論によって状態が抽象的なベクトル ψ で表わされ $\psi(x)$ はその一つの表現としてとらえられるに至ったことからして、いろんな量をより直截な記法で表わすブラ（括）とケット（弧）のアルゴリズムがやがてディラックによって導入されることになる。すなわち状態空間のベクトル ψ は $|\psi>$ あるいは単に $|>$ で表わされ、二つのベクトル $\psi=|\psi>$、$\varphi=|\varphi>$ の内積は $(\psi,\varphi)=<\psi|\varphi>$ と書かれる。これは順序により $<\psi|\varphi>=<\varphi|\psi>^*$ であり、とくに $<\psi|\psi>$ は正（またはゼロ）で、ψ のノルムを表わす。A が a' なる固有値をとる固有ベクトルは $|a'>$ と書かれる。A がオブザーバブルであれば $\{|a'>\}$ は完全系を張る。ことに x が固有値 x' をとる固有ベクトルは $|x'>$ であるが、シュレーディンガーの波動関数 $\psi(x')$ は $\{|x'>\}$ をベースとしたときのベクトル ψ の成分、すなわち両者の内積にほかならない。

$$\psi(x)=<x|\psi>$$

またシュレーディンガーの固有関数が変換関数の意味をもつことを前にのべたが、これは

$$\psi_E(x)=<x|E>=S_{xE}$$

一般に $\{|a'>\}$ なるベースから $\{|b'>\}$ なるベースへの変換関数は $S_{b'a'}=<b'|a'>$ であり、注（11）であげた

$$\psi_p(x)=<x|p>=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,e^{ipx/\hbar} \tag{10-18}$$

もその例である。内積は表示——すなわちベースのとり方——によらない、等々……である。

このディラックの記法は非常に便利であり、ディラックの仕事においてこのような巧みな手さばきが重要な役割をしていることは見のがせない。とはいっても一般的には、このブラとケットの記法でつねに一貫しようと固執することは得策ではなく、目的に応じていろんな記法を混用するのがかえって融通性があってよいと思う。エレガンスが問題なのではない。

変換理論の達成およびそれにもとづいた量子力学の新しい展開（これは後章でみる）の面では、ディラックの活躍が目ざましいが、実際、量子力学史のこの局面（phase）はディラック的才能がとくに適したものだったといえる。

§10•3　確率の干渉

変換理論によって量子力学の数学的な構造が見通しよい形に把握され、同時に理論形式を実験事実につなげる方式が体系化された。すなわち、ある状態における諸量の確率が状態ベクトルあるいは波動関数から統一的にひき出されることになった。

この処方は実験事実と合致するものであって“結果としては”正しいものにちがいない。つまりそれは数学的なフォーマリズムとしてコンシステントであり、かつそれと観測との対応づけを与える処方箋として正しい。しかし、物理は計算規則の確立、その観測との対応づけで終わると思うのは早計である。確率の解釈が前章にのべたボルン式の考え方の一般化にとどまっている限りでは、それはなお概念的な困難を含むものといわねばならないのである。かくして変換理論のフォーマリズム全体の背後に依然として解釈の問題が残っており、そこにはなおもいろんなパラドキシカルな問題が伏在しているのである。量子力学の矛盾のない解釈のためには観測装置を考慮に入れた観測の分析が必要であり、数学的フォーマリズムの意味づけ自体においても「観測」という言葉をさしはさむことが矛盾をさけるために決定的であるということを、やがてハ

イゼンベルクらが認識するわけである。

さてボルン流の確率解釈の立場では、因果的に決定されるのは確率を導く波だけであって、個々の場合における物理量の値は確率的にしかきまらないとするが、電子は各瞬間に位置や運動量などの粒子的諸量の確定したある値をもつことを暗黙のうちに認めたうえで、ただそれが個々の場合については偶然的で理論的に予測できず、実際測ってみない限り未知である、——しかし、同じ波動関数で表わされる状態をたくさん準備したものについて、値の確率が予知できるとしている。しかし同じ波動関数で表わされる状態について、場合場合によって粒子的な量がいろんなちがった値をとるというのは、波動関数というものが状態を可能な窮極まで指定していないからだという考えにつれもどし、こうして再び波と確率との背後に古典的な粒子と隠れたパラメターの考えを想定せしめることになるおそれがある。

確率的意味づけをほどこされた変換理論が正しい結果を与えるということは、量子力学が純粋な確率的な理論であるということを意味しないし、また古典統計力学的な意味での統計理論であるということも意味しない。このことは、端的には、この確率的意味づけをほどこされた変換理論が「確率の干渉[12]」という効果を一般的に含意しているということにあらわれる。こうして理論の数学的構造は、粒子的諸量を同時に荷なった物理的実体を許さず、隠れたパラメターをいれる余地をもたない(これについてはなお次章参照)ことが明らかになってくる[13]。

いまAなる量が確実にa'なる値をとる状態で、Bなる量がb'なる値をとる確率は

$$P_{b'a'}=|S_{b'a'}|^2 \tag{10-19}$$

であった。同様にBが確実にb'なる状態でCがc'なる確率は

(12) これはすでにボルンにおいて意識されており、ついでディラックとヨルダンによって一般的に明らかにされた。

(13) かなり自明にみえるような一般的な仮定にもとづいて隠れたパラメターを否定する「証明」が、のちにノイマンによってなされる(1932)。

$$P_{c'b'}=|S_{c'b'}|^2 \tag{10-20}$$

である。ところでAがa'なる状態で、Bはその固有値が$b', b'', \cdots\cdots$のいずれかの値を(10-19)の確率でもつのだから、Aがa'なる状態でCがc'なる値をもつ確率は

$$P_{c'a'}=\sum_{b'}P_{b'a'}\cdot P_{c'b'}=\sum_{b'}|S_{b'a'}|^2\cdot|S_{c'b'}|^2 \tag{10-21}$$

のはずである。しかるにこの確率は、われわれの一般的な確率解釈によれば(10-19)、(10-20)式そのものと同様の方式で与えられるべきであり、かつ(10-17)により

$$P_{c'a'}=|S_{c'a'}|^2=|\sum_{b'}S_{c'b'}S_{b'a'}|^2 \tag{10-22}$$

である。ところがこれは一般に(10-21)と一致せず、$S_{b'a'}$などにおける位相因子がきく。

このような矛盾は、ある状態において各物理量がとにかくそれぞれ確定したある値をもつ――その値が個々の場合に偶然的で未知であるにせよ――とする限りさけられない。このことは、この矛盾から脱出する道が、この前提を捨てることにあることを示唆する。すなわち、ある状態において各物理量は必ずしも確定した値をもつものではないという考え方に改めることを。

だが、その状態においてわれわれがある物理量を測れば、たしかになんらかある値が得られるであろう。しかし、それは測れば得られるのであって、だからといって測らないでもその値をもっていたはずだとは必ずしもいえないという考え方もありうることに注意せねばならぬ。すなわち状態が、その量を測るさいに、まさにその量の見出された値を確定的にもつような状態へと変えられたのだという考え方である。しかし、確率的解釈は結果からいって正しいはずだった。実際、そこで「Aがa'なる状態でBがb'なる値をとる確率が$|S_{b'a'}|^2$」と言ったことは「Bなる量を観測したとき」という但し書きを挿入すれば正しい解釈となることが次章で説明されよう。

同じ注意は「遷移確率」という語を使うさいにも当然適用されねばならない。

§ 10・4　理論の厳密化

確率的意味づけをともなった変換理論によって量子力学が基本的には成立したといっても、まだそれはいろいろ発見法的な性格を残しており、質点系の量子力学の場合に限っても、くわしくいうといろいろ明確でないところが残っているので、理論体系が完成したとはいいきれない。たとえばシュレーディンガーの波動関数の1価性とか連続性、有限性に関連するクライテリオン、物理量を表わす演算子についての固有ベクトルの完全性、物理量を構成するさいに可換でない量の積の順序をきめる規則、行列力学と波動力学の厳密な同等性、重畳の原理の適用についてのなんらかの制限、射線表現とベクトル表現の同値性、等々の問題である。一般にこういうデリケートな点を精密化していくさいのクライテリオンとして、こんどは、ほかならぬ**確率的解釈の原理**、すなわちフォーマリズムは確率的解釈を許すようになっていねばならないという要請が、逆に指導原理として働きだすことになる。実際、この物理的要請にもとづいて理論をリファインしていくことができる。

ディラックは行列力学を拡大してこれを波動力学と融合させたわけであるが、そのさい彼が δ-関数というトリックを導入し、無限大のノルムの固有ベクトルを用いて変換理論をすすめたのは、数学はあくまで道具なのであり、物理的観念を見失わずに議論をできるだけ直截にすすめるという目的のためであるが、このことはその「変換理論」が発見法的な性格をおびていることを意味し、少なくとも数学的に問題を残している。

そのころゲッチンゲンのヒルベルトのもとにきた若い数学者ノイマン

---

(14)　ノイマンによれば δ-関数は一つの虚構（フィクション）にすぎない。他方 δ-関数によるあつかいを数学的に厳密にすることは、のちに '超関数' (distribution) の理論でなされるようになる。ただしこれですべてこと足りるようにはなっていない。

は δ-関数を斥け[14]、数学的厳密さを維持しつつ行列力学と波動力学を統一することを遂行した（1927—29)。行列力学は抽象的にみえるが、そこでは物理量が具体的な行列で表わされるという意味では、抽象的ではない。他方、波動力学では物理量は波動関数に働く具体的な演算子で表わされている。ノイマンは両者を抽象化することによって統一し、物理量を“可分な”抽象ヒルベルト空間の抽象的な演算子で表わし、これによって理論を公理論的に再構成し、量子力学の数学的な基礎構造をより明確にした。

そのさい本質的な問題は、系のヒルベルト空間が一般に無限次元であるため、物理量を表わす演算子が一般に有界でないことに関係している。たとえば正準交換関係のため x や p も有界でない。このような有界でない演算子については定義域の問題がともない、加法・乗法が必ずしもスムースにいかないという複雑さに注意しながら議論していかねばならない。彼は、物理量が非有界な演算子で表わされる場合、確率解釈のためにはその「自己共役性」が必要なことを明確にし、そのような演算子の固有値問題を“スペクトル分解”という形で定式化し、確率的解釈に新しい定式化を与えた。

また正準交換関係をみたす演算子の表現で既約なものは、（自由度が有限なかぎり）適当な条件のもとでユニタリー変換の任意性を除いて一意的であって、本質的にはシュレーディンガーの表現で与えられることを証明し、これにより行列力学と波動力学の同等性を厳密なものとした。しかし、ここではノイマンの仕事にはこれ以上たち入らないことにする。

第11章　不確定性と相補性、量子力学の解釈

§11·1　ハイゼンベルクとボーア

確率解釈をともなった変換理論によって量子力学の数学的構造と観測との対応づけの処方箋が明らかになり、ことに状態がベクトルで表わされるということが確立したけれども、それだけではまだこの理論の解釈の問題は解決したとはいえないし、状態概念の物理的意味もすっかり明らかになったとはいえない。ハイゼンベルクは、量子力学のフォーマリズムがととのったにしても、その結果が「直観的に」明らかになるのでない限り、それだけでは理論として満足なものとは考えなかった。それで、彼はその直観的意味について考察した。

先に、彼がその理論をたてるのに定常状態を残しつつ、それに対するボーアの軌動運動の描像を捨てることから出発したことをのべた。しかし、たとえば電子が霧箱のなかを走っているようなときには、その飛跡が見えることも事実である。彼の理論は「行列力学」として形式的には大いに整備され展開されていったけれども、この霧箱の飛跡というような事実は、この抽象的な行列力学の言葉でそもそもどう記述するのか不明であった。ところがシュレーディンガー理論が出るにおよんで、定常状態に定常波の描像を付与したのみならず、非定常状態も進行波的な波動関数で記述されることになった。そこで、ハイゼンベルクはこれによって霧箱に見られる電子の飛跡のようなものも記述できるのではないかと考えた。ところがシュレーディンガー方程式によれば、波束はすばやく拡散していくため、それがうまくゆかないのである。ただ、ここでひとつ注意すべきことは、この霧箱のなかの電子の飛跡なるものも幾何学的な線なのではなくて、じつは小さな水滴のとびとびの列なのであって、

それは電子の刻々の位置や速度をシャープに定義しているわけではないということである。このことは、とにかく解釈問題の鍵が観測の分析にあることを示唆している。

他方、「理論のみが何を観測しうるかを決定するのだ」というアインシュタインのアドバイスからハイゼンベルクは一つのヒントを得た。すなわち変換理論によって波動力学と行列力学とが融合するに至り、この量子力学の数学的スキームはもはや完全なものと考えられ、かつその確率的意味づけは実験と合うのだから、この理論体系自身完全なものと考えられる。ゆえに、そもそもこのフォーマリズムで表現されるような情況だけが自然界に現出されるはずだと考えるべきである。このことをみとめたうえで、量子力学のフォーマリズムの特徴的な点は、粒子の位置に対応する演算子 x と運動量に対応する演算子 p の非可換性であることに注目するならば、この変換理論と確率的意味づけにもとづいて、粒子の位置と運動量とについて同時にどこまでの精度で語ることができるかという点をしらべてみることが思い浮かぶ。それは容易であって、結果はすぐあとで説明するハイゼンベルクの「不確定関係」((11-4) 式をみよ) ということになる。

ハイゼンベルクは、この「不確定関係」は粒子の位置と運動量という二つの古典的概念の同時の使用が制限をこうむることを意味するものと考えた。つまり彼は、アインシュタインが空間的にはなれた2点での絶対的同時性という概念を否定することによって特殊相対論をたてた場合とアナロガスに、「粒子」が空間のある1点である確定した速度をもっていると語ることは意味がないとみなし、そのことにもとづいて量子力学の矛盾のない解釈が可能になることに気づいたのである。

そこで次に彼は、実際どんな実験をもってしてもこの「不確定関係」で許されるような状態しか生じえないということを、思考実験によって確かめることにかかった。ことに彼は、学友であったドルーデの息子が投げかけた思考実験——X線を使った分解能の大きな顕微鏡で原子中の電子の軌道を観測することができはしないかということ——をしらべ、その場合も、そのさいに用いられる光の粒子－波動二重性の結果として

「不確定関係」をこえることはできないことを確かめた。こうして彼は確定した位置と運動量という概念の同時の使用を制限することによって矛盾がさけられ、かつそういう制限は実験的可能性の限界ともちょうど一致しているということを認識したのである。

この「不確定関係」を考慮することによって、先ほどの霧箱の飛跡という現象を理解する問題にあらためて近づくことができる。ただし、そのさいもう一つ重要なことは、波束は各水滴のところで（すなわち各観測点で）収縮した新しい波束におきかわる――その列によって飛跡ができる――と考えねばならないということである。

ここにおいてハイゼンベルクは「量子論的運動学および力学の直観的内容について」という――彼の最初の論文と似た表題をもった――特異な論文を書き上げた（1927年3月）[1]。

一方ボーアは、先のボーア－クラマース－スレーターの理論がボーテ－ガイガーの実験によって否定されて以来、要素過程でのエネルギー－運動量の厳密な保存とそこに現われる光の粒子性を光の波動性と調和させるには、根本概念のどのような変革が必要かということに思いをめぐらしてきた。さらにシュレーディンガー理論の成功をみるにおよび、粒子性と波動性という矛盾する二つの面が、光についても電子についてもドブロイの関係

$$E=h\nu, \qquad \vec{p}=\vec{h}\vec{\kappa} \tag{11-1}$$

によって関係づけられるという事柄をあらためて見なおした。彼は、光

(1) ハイゼンベルクは1926年夏からボーアのところに講師のポストできており、二人で量子力学の解釈の問題の討論を重ねてきた。ただしハイゼンベルクとはちがった方向から問題にアプローチしていたボーアは、このハイゼンベルクの論文になお不満であり、その出版を思いとどまらせようとさえした。それはかつてのボーア自身の論文（1913）に対するボーアとラザフォードとの対決を想起させる。結局パウリがわって入り、ハイゼンベルクがその論文にやや異例の「あとがき」をつけ加えるという形で発表されることになった。一般にハイゼンベルクの論文は独創的であると同時に粗削りのことが多いが、この論文にもそういうところがある。

や電子の粒子性と波動性の二重性をすぐ矛盾だと言う前に、粒子性と言いまた波動性と言う場合にそこで実際何を見ているのかということをよく考えなおし、おのおのの場合についてそれぞれの観測の条件をも記述に含めるべきことに留意すれば、矛盾をさけうるということに気づき、そうしてその見方のもとで（11-1）の関係を普遍的なものとして認めるに至った。それは粒子性と波動性が排他的な観測条件のもとで現われつつも、あい補うものであるという「相補性」の解釈である。彼ははじめ、ハイゼンベルクが変換理論のフォーマリズムを基礎的なものとして、そこから「不確定関係」をひき出したゆき方を好まなかったが、結局ハイゼンベルクの不確定関係が相補性の一つの場合になっているものとして納得するに至った。このボーアの考えは、1927年9月コモでひらかれたヴォルタ100年記念の国際会議での講演においてまず発表された。すぐつづいて10月には、第5回ソルヴェー会議がひらかれたが、そこでボーアとハイゼンベルクの解釈はアインシュタインとの白熱的な討論にさらされた。

ボーアは、この解釈をその後も徐々に推敲していくことになる。とくにそこで強調されたことは、ミクロな系を記述する量子力学は観測を通じて古典的レベルに訴えることによってはじめて現実的な意味づけを得るのであり、そのさい観測装置の最終段階は“古典論”——それは時空的記述と因果的記述とを同時に許すものでありそのことによって客観的性格をもつ——に従うことによってまさに観測装置としての役割をはたしているという点である。ボーアが次第に身につけた物理の方法は、数式というものはそこに出てくる記号が何を表わしているか——単に数学的に何を表わしているかということだけでなく物理的に何を表わしているか——それが結局測定の仕方とどう結びついているかということについて、誰にでもわかる日常語に近いものとしての古典論の言葉で説明できるのでない限り、どんな高尚にみえる理論もまだ物理とはいえないということを言い張り、そういう説明を自分にも人にもあくまで要求することにあった。これが対応原理とともにまさに“コペンハーゲン精神”といわれるものの中核であって、量子力学の形成と解釈を導いた重要な

方法を含んでいた。

ボーア－ハイゼンベルクの解釈は“コペンハーゲン解釈”とよばれるようになり、量子力学のオーソドックスな解釈として、以来物理学者の大多数によって受け入れられるようになった。[(2)]

§11・2　ばらつきの関係と不確定関係

確率的意味づけをほどこした変換理論に従って、粒子の位置 x と運動量 p の確率分布の間の関係をしらべよう。波動関数 $\psi(x)$ で表わされる一般の状態——すなわち x が x' なる値をとる確率振幅が $\psi(x')$ なる状態——で p が p' なる値をとる確率振幅 $\tilde{\varphi}(p')$ は、確率の干渉をもたらした (10–17) に従って

$$\tilde{\varphi}(p')=\int S_{p'x'}\psi(x')dx', \quad S_{p'x'}\equiv\psi_{p'}(x')^* \tag{11–2}$$

ここで $\psi_{p'}$ は p が p' なる固有値をとる波動関数であって、ドブロイの平面波 (10–3) すなわち (10–18) にほかならないこと（そしてこのことが交換関係

$$px-xp=-i\hbar \tag{11–3}$$

の直接の結果であること）は前に説明した。このことを用いると、確率振幅の間の関係 (11–2) から確率の間の関係として次のことが出てくる。ある状態において p のとる値のばらつきの度合[(3)]（‘分散’ あるいは ‘偏差’）$\overline{\Delta p}$ と x のそれ $\overline{\Delta x}$ は

$$\overline{\Delta p}\cdot\overline{\Delta x}\geq\hbar/2 \tag{11–4}$$

なる不等式をみたす。

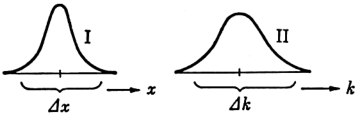
---

(2)　ただしアインシュタインはこれを彼の“科学的本能”と相容れないものとして受け入れず、上記ソルヴェー会議での論争以来、解釈問題をめぐる対立はずっと尾をひくことになる。

(3)　p の平均値からのずれの自乗の平均値が $(\overline{\Delta p})^2$ である。$\overline{\Delta x}$ についても同様。

こうして交換関係と確率解釈の結果として (11-4) を得た。これはボルン的な確率的解釈の立場では"ばらつきの関係"というべきものにとどまる。しかし、すでにのべたように、ボルン的確率解釈は十分なものでない。逆にハイゼンベルクは (11-4) のなかに新しい解釈——不確定の考えの具体的な形をみるのである。

なおボーアは同じ関係をむしろ次のように考えて導く (1927)。大体 Δx の範囲にあるような粒子の状態というものは、この範囲でのみ目立って0でないような波動関数、いわゆる波束で表わされるが、このような波は波数 k を異にするたくさんの平面波 e^{ikx} の重なり——その干渉



Iのような波束は、波数 k の平面波 e^{ikx} のいろいろのものをIIのような割合で重ね合わせたものに相当している。Iがシャープになるほど II はなだらかになり、$\Delta x\cdot\Delta k\sim 1$ の関係にある。

によって Δx のなかでは強めあい、外では打ち消しあうような——でつくられるが、そのために必要な成分平面波の波数 k は $\Delta k\gtrsim 1/\Delta x$ の範囲にわたるということが波——その波動方程式がいかなるものにもせよ——の数学的な性質である。ところが波数 k の平面波は粒子の $p=\hbar k$ の運動量の状態に相当する(ドブロイの関係)から

$$\Delta p\cdot\Delta x\gtrsim\hbar \tag{11-5}$$

が得られる。こうして (11-5) を粒子-波動のドブロイ的な二重性 (11-1) の結果として出したが、この導き方は前の (11-4) の導き方と本質的には同じであるとみることができる(なお §11・4 参照)。

(11-4) がばらつきの関係を与えるということは、前に確率的解釈について注意したように、結果としては——すなわち、ある状態で位置の測定をくり返したとき得られる値の統計的偏差と、同じ状態について運動量の測定をくり返したとき得られる値の偏差との間の関係を与えるものとしては——正しい。しかし、測らないときはどうか? ボルン的確率解釈では、電子の位置や運動量は測る前にも、測ったあとと同じ確定し

た値をもっているが、ただ未知なだけだ、と暗黙のうちに考えている。しかしハイゼンベルクは個別のケースについて、測る前に電子の位置と運動量は確定した値をもっておらず、位置と運動量の確定した値を同時にもちえぬ程度がまさに（11-5）式で示されると解釈するのである。こうして（11-5）は、測定をくり返したときの結果に対する統計的ばらつきの関係を意味するのみならず、個別のケースについてのこのような“不確定関係”を意味するとみなされる。不確定関係は電子に対する古典的な粒子概念の適用限界を示すものであり、電子の「粒子性」なるものが古典的な粒子性そのままのものではなく、いわば電子の「波動性」につながるところの不確定関係によって制約された限りでのものとなることを示す。(4)

（11-5）が測定を行なう前の一つのある状態についての不確定関係として、また測定を行なった結果についてのばらつきの関係として成立することをのべたが、（11-5）は交換関係の結果としてまったく一般的なものであり、いかなる状態についても、したがって位置なり運動量なりの測定を行なったあとの個別の状態についても不確定関係としてやはり成立する。ただ、たとえば位置を測れば、とにかくどこか1点 x' に見出されるということは、測定の結果、はじめの位置の不確定の状態から位置の x' に確定した状態へと変化したと考えねばならぬ。このことは、その直後にもう一度位置を測るとこんどは確実に x' 点に見出されるということから確かめられる。(5) このような状態は（10-7）式で表わされるが

$$\psi_{x'}(x)=\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int e^{ik(x-x')}dk \qquad (k=p'/\hbar) \qquad (11\text{-}6)$$

からわかるように、あらゆる運動量の固有状態が同じ重みで重なったものと見られ、$\Delta x=0$、$\Delta p=\infty$ に相当し、やはり（11-5）をみたす。この

(4) したがって（11-5）の関係は、プランクの位相空間の素領域の考え方に類縁をもってはいるにしても、古典的状態が位相空間に確率的に分布しているというのではないのである。

(5) この種の測定は‘第一種の測定’とよばれる。

ように、状態を表わす波動関数が測定——いまは位置の測定——にさいして

$$\psi(x) \rightarrow \delta(x-x') \qquad (11\text{-}7)$$

のように非因果的・不連続的に縮むということは、前に物質場の解釈の困難としてあげたことであった。われわれは物質場の実在的な波の解釈は捨てるけれども、このような波を非古典的な粒子の状態の表示として受け入れ、その測定のさいの非因果的飛躍を認めるのである。

電子を波に還元してしまおうとするシュレーディンガーの物質場の解釈も、電子の本体を結局において粒子的なものとみなすボルン流の解釈も、いずれも結局そのままでは維持できなかった。われわれはこのような一元的な立場でなく、古典的なものとしての粒子性、古典的なものとしての波動性を否定しつつ、観測の分析を媒介にして両者を統一する立場に進むのである。ボーアは相補性という言葉を使ってそのように進んだのであった。波動性との統一のために古典的な粒子性がいかに制約されるかを示すものが不確定関係であるが、ハイゼンベルクはこのような方向から進んだ。それは概念の論理的序列の差であって、結局は同じことであった。

§11・3　思考実験と不確定関係

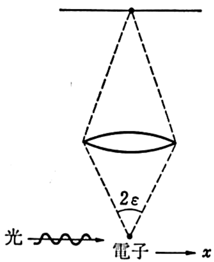
さて前節にのべた不確定関係の把握、測定による状態の不連続的変化の考え、それにもとづく理論の新しい解釈に導く一つの動機ともなり、またこのような解釈が矛盾を含まないことを保証することにもなったものは、ハイゼンベルクの思考実験による概念批判であった。

彼ははじめ、原子について測りうるものは、その発する光の振動数や強度の値であって、原子内における電子の位置や運動量の値というものは原理的に測れないものであり、したがって無意味なものだと考えたことを前にのべた（§6・1参照）。このような批判的な立場は、しかしもっと精密にせねばならないことも前に注意した。われわれは、原子内にせよ原子外にせよ、電子の位置というものを測るような実験を原理的に考え

ることはできる（これはボルン的確率解釈では暗黙のうちに認めていたことであるが)。いま概念批判において要求されることは、むしろ電子の「位置」という概念を「位置」を測るための一定の実験方式というものと離れてかってに考えてはいけないということにある。こうしてハイゼンベルクは、位置を測る思考実験を注意深く吟味することに進んだ。

彼は電子の位置を測る一つの方法として、これに光をあて、電子による散乱光を顕微鏡でとらえる場合を考え、そのさい対象（電子）と観測手段（光）との相互作用の量子論的な性質、すなわちそこで観測手段となっている光の二重性の事実に関連して、観測手段が対象にある程度不明の攪乱を不可避的に与えることを示した。

これは具体的には次のように説明される（ボーア)。まず用いる光の波



説明は本文参照

動性のために、その波長の程度までしか電子の位置を分解して認めることができず、位置測定の精度 Δx は、散乱光の波長を λ、対物レンズの開口角を 2ε として

$$\Delta x \sim \lambda/\sin\varepsilon \qquad (11\text{-}8)$$

である[(6)]。他方、光が粒子性をもつことを考慮すると、この測定には少なくとも１個の光量子が電子で散乱され、対物レンズに入らねばならない。しかし、このとき電子はコンプトン効果で光量子の運動量 h/λ の程度の衝撃を受ける。散乱光量子の方向は開口角 2ε の範囲で不明であるから、結局光量子の——したがって電子自身の——x 方向の運動量成分は

$$\Delta p \sim \frac{h}{\lambda}\sin\varepsilon \tag{11-9}$$

の程度不明である。ゆえに (11-8)、(11-9) 式から

$$\Delta x \cdot \Delta p \sim h \tag{11-10}$$

なる関係があることになる。

これは、個々の場合について電子の位置と運動量を同時にこの関係以上に精密に測りえないという観測の精度に対する関係であって、やはり実験的に確かめられるところの「ばらつきの関係」としての (11-5) とは、さしあたり意味を異にする。(11-10) はまた、観測による攪乱の程度を規定するものとみることもできる。すなわち、運動量がわかっているような状態について位置を観測すると、そのさいに運動量に不明の原理的に制御不可能な攪乱が——そのために、その結果の状態についての知識をまさに (11-10) で制約されるものにするような攪乱が——働くということ、そしてその大きさ $\Delta p \sim h/\Delta x$ は h の有限性のゆえに 0 であることはできないということである。

(11-10) の関係は他の思考実験を考えても成り立つ一般的なものであり、このように電子の位置と運動量が原理的に (11-10) 以上の精度で知りえないということは、実証論的な立場からすれば、電子の位置と運動量について同時に (11-10) の関係以上の確定さで語ることが無意味だということ、つまり電子が本来 (11-10) の関係以上に確定した位置と運動量を併わせもつようなものではないということと同じである。

---

(6) (11-8) は光の波動性に由来する関係であるが、これを光量子の言葉を使って言いたければ、次のようになる。——多数の光量子がレンズを通る場合には、普通の回折理論の示す回折縞（濃い中央の斑点のまわりに環が並ぶ）が乾板上に生じるはずである。ところが、ただ1個の光量子がレンズを通る場合には、それはこの縞上のどこかにくるはずである。したがって、この点が斑点の中心位置を教える精度は第1の回折環の半径 $\Delta x \sim \lambda/\sin\varepsilon$ の程度ということになる。——ただし、これは光量子の言葉を使って光の波動性に由来する結果を言いかえたにすぎない。

たしかに（11-10）なる精度の関係の一般的な存在は、このような不確定の解釈が矛盾をもたらさないことを保証するものである。しかし、位置と運動量が同時に（11-10）以上の精度で測りえないにせよ、電子は、未知であるが確定した位置と運動量を古典的な粒子と同様にもっていると考えることも——実証論的立場を離れれば——一応可能である。しかし、これは前のボルン流の解釈に逆もどりすることになる（この解釈の困難についてはすでにのべた）。そしてこの立場では、実験的な精度関係としての（11-10）は不確定関係ではなくて“不可知関係”というべきものとなる。

これに反して（11-10）を不確定関係としてとらえることは、変換理論のもたらした（11-5）に対する不確定関係の解釈（§11・2参照）と符合することになり、量子力学の矛盾のない解釈の基礎になることを保証することになる(7)。そして前節でものべたように、これが不確定関係としてもとらえられるということは、古典粒子概念が変革されるべきことを示すと同時に、古典粒子概念の適用限界を与え、したがってまた、電子の変革された新しい実体概念と古典粒子概念との対立と移行の関係を示すものとして役立つことになる(8)。

---

(7) 実際ハイゼンベルクの思考の筋道は単なる実証主義ではなかった。生(なま)の経験というものはそれだけでは意味がないのであって、正しい理論——つまり量子力学自身——に準拠してのみ何を観測しうるかが言えるのだという前述の方法に従って進んでいる。量子力学のフォーマリズムは、粒子が確定した位置と確定した運動量を併有するような状態は含まないゆえに、そのような状態はそもそも存在しないと考えるのである。

(8) 不確定関係を $\Delta x \cdot \Delta v \sim \hbar/m$ と書くとわかるように、$\hbar \to 0$（考えの上で）と考えるか、$m \to \infty$（重い物体）の場合を考えると、この右辺の $\hbar/m$ は無視できる。ただし $\Delta x \cdot \Delta v \sim \hbar/m$ となるのは都合のいい場合であって、一般に波束は時間とともに拡がってゆく。しかし、その拡がる速さも $\hbar/m$ が小さければおそい。したがって $\hbar/m$ が小さい場合は、いつもこのような波束の状態のみを矛盾なくとることができ、その限りで不確定関係は無視できるようになり、古典粒子概念が妥当することになる。ただし、これで古典粒子と量子的粒子の概念的対立がすっかり解消するのではない。

古典粒子概念が変革されるということは、ことに電子の状態概念が変革されることである。すなわち状態はxとpの値をシャープに与えることによって指定することのできないもので、Δx、Δp なる不確定さの幅を許さねばならぬことになる。状態が一般にこのようなものであるからには、上述の思考実験で位置を測る前の状態についても、やはりこのような不確定関係が成り立っているはずである。われわれは測定の前には電子は一定の運動量をもつとしたが、そうである限りそのような状態で位置は単に不明であったのではなくて、まったく不確定であったのだと考えねばならぬ。そして位置を測るということは、その未知な値を知るということではなく、その不確定な状態をより確定した状態に（確率的に）変える——同時にこれと共役な運動量は不確定になる——ことを意味することになる。[9] もし位置をシャープに測るならば、位置が確定すると同時に、運動量はたとえば烈しいコンプトン効果を受けて、その大きさも方向も完全に（かつ不確定に）乱され、[10] 運動量については完全に不確定な状態を得ることになる。

§11・4　思考実験に関する注意と相補性

前述の思考実験について二、三の点を注意しておこう。§11・2 で不確

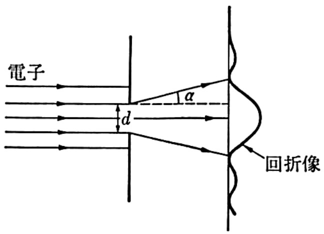
---

(9)　前に思考実験のさいに、運動量に不明の原理的に制御不可能の攪乱が働くといった言葉も、量子力学の立場からいえば不確定の攪乱が働くというべきことになる。

(10)　不確定関係から逆にわかるように、電子の「位置を測る」という実験であるためには、これにできるだけ大きな運動量の攪乱をもたらすような烈しい相互作用を考える必要がある。できるだけ大きな（短波長）光量子をあてて散乱させるというわれわれの考えた思考実験は、ちょうどこの目的にかなったものである。もっと重い粒子をあてて散乱させたのでは、位置測定としてそれほど都合がよくない。同じ理由によって、いまの実験を逆に使って（光量子に電子をあてて散乱させる）光量子の位置を測ろうとすると、後者の波長（λ）の程度の精度しか達せられないこと（$\Delta x \sim \lambda$）になる。それは、この場合の運動量の攪乱（$\sim h/\lambda$）を——こんどは λ がきまっているので——限りなく大きくする自由がないからである。

定関係が電子自身の粒子－波動二重性と密接な関係にあることを説明した。ところが§11・3の思考実験では、仲介として働く光の二重性の事実から出発して物質粒子[11]についての不確定性を導いている。そして粒子について不確定関係が成り立つということが、逆に、粒子が光と同様に $\vec{p}=\hbar\vec{k}$ なる共通の公式で規定される粒子－波動二重性をもつことを意味するとして理解されることになる。前にドブロイが光との類推で電子の二重性を思いついたことをのべたが、それは光と電子の相互作用を問題にするときのこのような事情を根拠としていたと解釈しなおすこともできるわけである。つまり理論がコンシステントなためには不確定性原理は普遍的でなければならず、たとえば電子についてそれが成り立てば、これと相互作用するすべての粒子について成り立たねばならない。これがドブロイの関係（11-1）が同じ h を用いて普遍的に成り立つということにほかならない。

そこで当然光を用いないで、直接電子自身の二重性の事実から（11-10）を導くような思考実験を考えることもできる（ボーア）。それは§11・2で電子の波動性の結果として（11-5）を出してきた推論を実験的な言葉で言いなおすことにすぎない。――電子のくる方向に面して垂直に d なる幅の穴をもつ衝立をおくと、これを通り抜けるときの電子の位置



説明は本文参照

（衝立方向への位置座標 x を考える）は $\Delta x \sim d$ の精度できまる。このことは電子の位置の測定とみなすことができる。ところが穴をくぐる電

(11) 「粒子」という言葉をこんごも用いるが、これはもはや古典的な粒子ではないことに注意せよ。

子は、波として回折され、波の波長を λ とすると大体 $\sin\alpha\sim\lambda/d$ をみたす α なる角に拡がることを知っている。このことはドブロイの関係により x 方向の運動量が

$$\Delta p=p\sin\alpha\sim(h/\lambda)(\lambda/d)=h/d$$

だけ不確定になることを意味する。ゆえに再び $\Delta p\cdot\Delta x\sim h$ が得られる。

最初の顕微鏡の思考実験については、なお次の点を注意せねばならぬ。それは電子の位置を測るということ、したがって電子の運動量に攪乱が加わるがそれが不確定なものであるということは、光をあててコンプトン散乱をおこさせたこと自体によるのではなくして、その散乱光に対して顕微鏡を用いてその像面においた(たとえば)写真乾板上に結像せしめる——そのさい散乱光子が顕微鏡に入る方向を確定するような観測を介在させない——というふうな観測[12]を適用したことによっている、ということである。もし同じ散乱光子に対してその運動量を測るような観測手段を適用するならば、散乱光子の運動量を、したがって運動量保存則を通じて電子の運動量の変化を、確定的に知ることになり——すなわち電子の運動量はたしかに攪乱をこうむるが、それは確定したものであり——、運動量の確定した状態が得られ[13]、位置のほうは不確定である。

このように光子なり電子なりに対して、その位置を測定するか運動量を測定するかは**たがいに排他的な実験方式**を意味するということが、ここで本質的であることをボーアは指摘した。これらの思考実験で Δp は、粒子のうけとる運動量の攪乱であると同時に、測定装置が粒子から反作用としてうけとる運動量であり、つまり粒子と装置との間に交換されるものである。これが「不明」なのは、測定が一般に位置の測定という意

---

(12) あるいは反跳電子の方向を定める観測。

(13) 前に霧箱のなかでコンプトン散乱をやらせるコンプトン-サイモンの実験をのべたが、この場合は電子の反跳が観測され、電子が運動量のほぼ確定した状態(同時に位置も不確定関係の範囲で確定している波束の状態)にとらえられる。この場合は散乱光子も球面波として出るのでなく、反跳電子との間に運動量保存則をみたすような方向に出る。

味をもつためにはまぬがれえないことである。位置座標という概念そのものが座標系というものを予想しており、これは重い剛体である。前の例では乾板や衝立がこの役割をつとめる。位置を測るには、系を最終的にこの座標系を定義する物体となんらか相互作用させねばならぬ。そのさい粒子の位置がこれにマークされると同時に、その上へ不明の（不確定の）運動量が移される。もし、さらにこの量を知ろうと思えば、この座標系に反跳を許し、この反跳の運動量を測らねばならないが、それは第二の座標系に関して測られるのであって、最初座標系として使ったものは、もはや座標系としての意味を失う。はじめから系の運動量を直接測ろうとする場合にも、やはり装置の可動的な部分が働き、系の位置は不可制御の変位をこうむる。こうして、結局、どうしても両方の測定は同時に厳密に適用することのできない排他的な測定方式を要求するものであって、しかも測定が対象に攪乱を与えるので相次いで両方の測定を行なってみても、同じ状態についての位置と運動量をあわせ知ることにはならないのである。こうして不確定関係は、粒子自身の本性にもとづくものであると同時に、位置の測定と運動量の測定との排他的関係によって、それが矛盾に導かないことを保証されているものである。ただし、いま粒子自身の本性といったが、そういうものは測定装置との相互作用を予想して考えられるようなものであることに注意せねばならない。

他面「粒子」は、もとより位置とか運動量のような量のほかに、観測条件によらない不変な性質（質量、電荷など）をもっている。そして電子の質量がいつでも m であり、電荷がいつでも e であって、そのかけらが観測されることはなく、電子の個数というものが数えられるという意味の粒子性はつねに維持されている。

不確定関係は x と p の場合のように一定の非可換な交換関係をもつ二つの物理量について、ある不等式の形で成り立つものである。さらに演算子で表わされる物理量の測定ではないような場合についても、同じような不確定関係が成り立つ場合がある。たとえば粒子のエネルギーの測定値 E とそれが測られる時刻 t は

$$\Delta E \cdot \Delta t \gtrsim \hbar \qquad (11\text{–}11)$$

なる関係に従う。これは適当な思考実験からEとtの観測の精度の間の関係として、すなわち「エネルギーを ΔE の精度で測るには (11–11) をみたす Δt の時間を必要とする」こととして得られる[(14)]。このことから、系がある状態にある時間が Δt であれば、その状態のエネルギーは——せいぜいこれだけの時間しか観測に利用できないのだから—— (11–11) をみたす ΔE の精度でしかわからないことになるが、これはエネルギーが ΔE だけ不明なばかりでなく、不確定だと解すべきである。こうして (11–11) は (Eについて) 不確定関係とみなされる。このことは (11–5) を導いたやり方と同様にして導くことができる。すなわち——波束について $\Delta k \cdot \Delta x \sim 1$ であったが、同様に $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$ だから[(15)]、これにドブロイの第一関係をつかえば、直ちに (11–11) になる。

以上のような分析はボーアやハイゼンベルクによってなされたものであるが、このような事情をもう少し敷衍し一般化して、ボーアは「相補性」という言葉で量子力学の一般的な物理的内容と記述の様式を特徴づけようとした。それはミクロの現象では、古典論の場合に現象を完全に記述するのに必要であったような二つの面が相互に排他的なものとなるということである。それはミクロの系の行動が、それを観測する手段と独立にきまっているという意味の自立性・客観性が制限され、その一方の面を現出するような観測条件のもとでは他方の面は消失しているということ、一方に焦点をあわせると他方はぼけるということである。この排他的な両面を一つの描像で表わそうとすると矛盾を生じるのであり、そうすべきではないこと、しかし両者はそれぞれの観測条件のもとにおける系の行動を記述するのにともに必要であるということ、そして相補

---

(14) このことをハイゼンベルクはシュテルン－ゲルラッハの実験例で示した。

(15) Δt 時間つづく波連の振動数が $\Delta\omega \sim 1/\Delta t$ 程度の幅をもつことは、光の場合スペクトル線の自然幅として、あるいは音波の場合についても、古典論の時代からよく知られていたことがらである。

的な二つの側面の間の関連は決定論的なものであることはできないので、統計的なものたらざるをえないということ、である。

ここでは、もっぱら粒子の位置と運動量の間のそのような関係についてみたわけである。ボーアは不確定関係（11-5）と（11-11）を、むしろ時空的記述とエネルギー－運動量の保存則の適用の意味での因果性の主張との間の相補性とする見方を強調した。

他の例をいえば、§3·3 および §9·3 でのべたヤングの実験において、回折縞の観察と、どちらの穴を電子が通ったかをきめることとの間に、すなわち干渉の現出と軌道をたどることとの間に、このような相補性がある。あるいはコンプトン散乱で、光子が散乱されるさいの電子の反跳の観測と各方向に散乱される光の可干渉性（コヒーレンス）との間にも同様の相補性がある。また前に（§4·3）、自発発光について、光が光量子としてある方向に放出され原子はそれに応じた反跳をこうむるということと、光が干渉性をもった球面波として出てゆき原子は反跳をこうむらないということ、との間のディレンマといったことがらも、じつは両方の間の相補性の関係なのである。この例では、原子の反跳運動量を観測するような実験条件のもとでは、原子の位置は不確定となるため、これから出る光の光路差は不確定となりコヒーレンスを失うのである。(16)

ここで最初にのべた顕微鏡の思考実験における推論の仕方について、次の点を注意しよう。この場合われわれは、光の古典的な波動論にもとづく関係と、単純な粒子論（アインシュタイン的光量子論）にもとづく関係——この二つの立場はたがいに矛盾するものである——を別々に適

(16) これらの例は粒子性と波動性の相補性といわれるものの例といってもよいが、“粒子”と“波”の相補性という表現は、それが具体的にどういうことをいっているかをのみこんだうえで使わないと混乱するおそれがなくもない。われわれがこれまで考えてきた電子の波は1個の電子に対する確率振幅であった。これに対して電磁場の場合の波は可観測量である。電磁場の量子力学では、各フーリエ成分について光量子の数と波の位相とが相補的な量になる。電磁場を量子化し、これと電子との相互作用を量子力学的にあつかうことは、ハイゼンベルクの不確定性原理の仕事とほぼ同じころにディラックによって開拓される（第13章参照）。

用したうえで、両方の結果を同時に用いて精度関係を見出し、これを‘実証主義的な’立場から解することによって不確定関係としてとらえなおした。このような推論のなかには、光に対する最初の単純な波動論および単純な粒子論に対する否定的契機が隠伏的に含まれているわけである。こうして、このような思考実験は‘発見法的に’働いた。出来上がった量子力学の立場でこの実験を記述するときには、このような二つの面は統一された形で含まれ、不確定関係ははじめから不確定関係として含まれていなければならない。実際、電磁場を量子化し、これと電子との全体を量子力学的にあつかうさいにはそうなっている。

すなわちこの立場では、光については次のような形で不確定関係が成り立っているべきである。――もし光束が粒子の位置を Δx の精度で測るのに適した形と振動数とをもつならば、その運動量は $\Delta G_x \cdot \Delta x \sim h$ なる ΔG_x の程度に不確定である。(17)（もし光についてのこのような不確定関係が成立しなければ、電子の不確定性も直ちに破られてしまうことになる。）実際、電磁場の量子力学は光の二重性を統一的に含むと同時に、そのことによってこのような不確定関係に合致するようになっている。すなわち、前に使ったと同じ単色の収斂光束では、古典光学の場合と同様、回折効果により焦点は（11–8）なる拡がりをもつ。ところで、このような収斂光束は波長を同じくし、方向を異にする多くの平面波の重ね合わせでつくられる。そのさい、これらの平面波はきまった位相差で重ね合わせるのでないと、光束はきまった焦点をもたない。ところが位相をきめると、その平面波に属する光量子の数が不確定になり、したがっ

---

(17) ここでは1個の光量子に対する不確定関係というものを問題にしなかった。例の思考実験では、散乱された直後の光量子の位置と運動量が電子と同じ不確定関係で得られるようにみえるが、この測定は光量子が乾板で吸収されたところで完結するものであり、測定自体によって光量子は消滅することになり、このような測定は光量子については次の現象の予見に用いうるような本来の測定ではない（これに反して、この実験は電子については本来の測定としての意義をもっている）。光量子の位置についての本来の測定を考えてしらべてみると、$\Delta x \sim \lambda$（λ は光量子に属する波長）なる制限があることがわかる（注(10)を参照）。

て光束の運動量も不確定になる。それをしらべてみると（11-9）と同様 $\Delta G_x \sim \frac{h\nu}{c}\sin\varepsilon$ であって、再びちょうど $\Delta x \cdot \Delta G_x \sim h$ となる。

§11・5　状態の概念と観測

われわれは、ここで不確定性と測定による攪乱の概念で、波動関数、より一般には、変換理論の諸形式に対する前の解釈を読みなおすこと——それはすでに§10・3、§11・2でのべた——によって、量子力学の合理的な、ほぼまとまった解釈を得ることができるわけである。すなわち波動関数は、まさにこのような、物理量が同時には不確定であるような状態という概念の精密な数学的表現であることがわかる。こうして電子というものの状態は、位置と運動量とが同時には不確定にしか定義されないようなものであり、重畳の関係に従うようなものであり、そしてこれについて位置とか運動量などを測定するといかなる値が得られるかについてあらかじめ確率的にしかいえないようなものである。こうして電子の状態は、波動関数によって最も精密に可能な限度まで規定されるような——その奥に隠れたパラメターを考ええない——ものであり、放置しておけば因果的に変化してゆくものであるけれども、にもかかわらず、このような状態についてある量を観測すると、その結果は一般には決定論的にきまっておらず、同じ状態について同じ測定をくり返すと[(18)]、そのたびにいろんな値がばらついて得られ、その分布についての統計的な関係だけが定まっているようなものである。この意味で、古典的な形の因果律は破れる。しかし、この場合も因果律は統計的な形では成立しているわけであるし、また測定装置をも含めた全体系については、その状態が状態ベクトルで表わされると考えられる限りでは、このベクトルは因果的に経過するはずである。波動関数は状態を表現するが、しかしそれ

---

(18)　したがって観測のさいの状態の変化は、測定を行なった量の確定した状態に変わるという意味で不連続的であるのみならず、そのような確定状態のうちのどれに変わるかについて、非因果的である。前にのべた測定による攪乱ということは、このような性格をも含んでいたのである。

は測定装置との相互作用というものから独立した対象の、それ自身の自立的な行動といったものを対象におしつけるものではない。

波動関数の与える統計的な答えというのは、もう一度いうと、波動関数 ψ で表わされる状態で A なる量を測定したとき、ψ を A の固有関数 $\psi_{a'}$ の集まりで展開したときの係数を $C_{a'}$ として、A の各固有値 a' が $|C_{a'}|^2$ の確率で得られるということである（§10・1参照）。この命題については、それが——系と観測手段を合わせたものを改めて観測対象と考え、これを第二の観測手段で観測するという立場であつかっても同じ結果を与えるという意味で——コンシステントであることを確かめておく必要がある。しかも、このような立場で問題を見直すことは、観測による攪乱、観測による不連続的・非因果的変化の意味をもっと明らかにするのに役立つのである。[19]

先に第一種の測定の例をのべ、そのさいの波束の収縮（11–7）にふれたが、これは一般的にいうと次のようになる。ψ で表わされる状態である量 A を測定して a_k なる値を得たとすると、この測定の直後には系は a_k に属する A の固有状態 ψ_k に移っている。つまり観測は系と装置との相互作用なのだが、そのさい系のみに着目したとき、観測前の状態関数 ψ は観測後 ψ_k に変化している。もちろん、そのさい装置の状態の変化がともなっており、それは一般にマクロな非可逆的な変化であるという事情があるわけだが、いまこの点は捨象し、測定前後における系の波動関数の変化のみを考えているのである。

観測についてはまた、その最後の段階は古典的に記述される出来事であることが本質的な意味をもっていることをボーアが強調した。実際、一つの実験において、結局われわれがある結果——記録し伝達しうるような結果——を得るというのは、“古典的なレベル”においてである。こうして系は量子力学で記述されるが、装置の最終段階や観測結果は古典論の概念を用いて表現されねばならない。そのことの不可避な結果として、量子力学で記述されている系に対する装置の反作用を精確にコン

(19) この研究はノイマン（1932）にはじまる。

トロールすることは不可能となる。制御不可能な攪乱といったのは、このことを意味していたのである。

さらに量子力学では、合成系の波動関数が一般に配位空間の一般の関数であることに関連して、量子力学に特有な不可分性が生じる。すなわちいちど相互作用した二つの部分が空間的に十分離れていって、力学的相互作用がなくなったあとでもなお両者は不可分で相互浸透の関係にあり、その一方だけについての状態ベクトルをあてがえないという情況がおこり、そのことに関連して一見パラドキシカルな相関効果を生じることである（アインシュタイン-ローゼン-ポドルスキー Einstein-Rosen-Podolski、1935)。

これらの問題の分析、いわゆる“観測の理論”はその後いろいろ論議されることになるが、いまこれ以上たち入らない。

さて、ここで逆に、思考実験から得られたものとしての不確定関係——そのさいの推論自身はアインシュタイン-ドブロイの関係のようなものを基礎にしている——を出発点として、量子力学の体系をつくり上げてゆけるかどうかをちょっと考えてみよう。

まず不確定関係の存在は、古典的な意味での因果律が量子力学では成立しなくなるということをおのずから含んでいるといってよい。不確定関係の存在によって、粒子の状態を指定するのにある Δx、Δp の幅を許さねばならず、未来を正確に予言できない。また位置と運動量との少なくともいずれかが拡がりをもっているのだから、そのような量をシャープに測るような測定を行なえば、その拡がりに属するどれかの値がばらついて得られると考えるほかなかろう。かつそのさいに、状態は測定を行なった量の確定した状態へと不連続的・非因果的に変えられると考えられる。

しかし不確定関係だけでは、これ以上のことを詳細に規定してゆくことはできない。それは定性的な $\Delta x \cdot \Delta p \sim h$ をいうだけで、x、p の値自身について、またその拡がりのもっとくわしいあり方について、限定しておらず、さらにこの場合の非因果的な変化がまったく無法則的なもの

ではなくて、確率の法則に従うものであることまで主張してはいないからである。

このような状態の概念を、概念的にもっと明確に、かつ定量的にとらえさせるものは波動性の原理であり、より一般には状態に関する重畳の原理である。それは相互の間に重ね合わせの関係が成り立つものとして状態を考えるもので[20]、それによれば、たとえばある量について不確定な状態は、その量について確定した状態（固有状態）の適当な重なりとみることができることになる。もちろん状態の重畳性ということは、不確定性の概念と密接な関係にある。古典論では、$\hat{x}$ と $\hat{p}$ のように同時に確定しえない量の関係というものは存在せず、ある状態においてはすべての量が確定しているのだから、状態の重畳ということは考えることができなかったのである。

不確定関係に、これと密接な関係にある重畳の原理を組み合わせ、さらに古典論との極限的一致という対応原理的な考えを入れ、これらをもとにしてシュレーディンガー方程式を含む量子力学の体系をつくり上げてゆくことができよう[21]。こうして理論が具体化してゆくと、不確定関係だけでは詳しく答ええなかった問題——すなわちある状態において、その不確定な物理量を測るとき、どんな値が得られるかという問題——に対するはっきりした答えを、量子力学の根本的な命題として与えることが可能となってくる。それは、結果において §10・1 で定式化したものである。

とにかく、われわれは量子力学の大体満足な解釈に達することができ

(20) ここで‘状態の重ね合わせ’といったことは、すべて正確には状態を表わす状態ベクトルについての重ね合わせと言うべきである。

(21) まえに電子についての二重性の関係を展開することによって、ドブロイ－シュレーディンガーによる波動力学の形式がつくり上げられたことをみたが、そのさい二重性の関係は不確定関係に相当する要素を含んでおり、さらにその波動性に関連して重畳する状態の概念が入ってくるので、行列力学よりもより平明な進路を与えたと考えられる。

たが、念のためにこのような立場で古い量子論における概念的な困難がどのように解消するかの、一、二の例をのべよう。なんども引き合いに出した、例の1個の電子（ないし光子）の二つの穴による回折の実験は、電子が二つの穴を同時に通り抜けると考えることによって、困難があっけなく解消する。電子は上の穴にある状態と下の穴にある状態との重なった状態（位置の不確定な状態）にあることができる。このことは、電子がどちらの穴を通ったかは、それを確かめる観測を行なっていない以上、無意味だといっても同じことである。しかしながら、われわれの考え方はさらに、実際もし穴のところで電子がどちらの穴を通ったかを確かめるような観測を行なったとすれば、電子の状態はその観測によって非因果的に変化し、どちらかの穴のところに——実験をくり返せばきまった頻度比で——見出されるということ、そしてこのような観測を実施するための実験配置の修正は最初の干渉縞の実験と両立しないものであって、その結果、最初見られたような干渉縞はもはや見られなくなることを主張するものである。そして事実はまさにそうなのである。

次にわれわれは、古い量子論でその最も非古典的な部分として、発光や非弾性衝突やコンプトン散乱などにおいて、いつも不連続的な遷移を考えた。そのさいそれは対象の自然的経過としておこるところの不連続的・非因果的な変化で確率の法則に従うものとみなされたのであったが、この見方は改められねばならない。たとえばコンプトン散乱において、光と電子との相互作用による状態の変化は自然的経過としては連続的・因果的なものであり、不連続的変化はこれを一定の仕方で観測するという情況（たとえば霧箱のなかで電子の反跳を観測する）において現出するのである。[22] こうして遷移は、単にまったく不連続的なものなのではな

(22) すなわち相互作用によって系は、電子がある方向に反跳され同時に光子がこれと運動量を保存する方向に散乱された状態——それらのあらゆる可能なものをきまった仕方で重ね合わせた状態——に連続的に移ってゆく。そこで反跳電子の方向を観測すると、そのさいに状態が重畳されている状態のどれか一つに確率的に“収縮”するわけである。

く、シュレーディンガー方程式に従う連続的な部分と、観測に際する不連続的な部分とからなる。そもそもボーアの前期量子論においては、系はどれか一つの定常状態にあり、その間に遷移がおきるという考えが基本的であったが、まさにこの考えが、それが観測をはなれて考えられていた限りにおいて、矛盾をはらむものであったわけで、いま改められねばならない。

あるいは、前にあげた方向量子化についてのパラドックスも、状態の重畳の概念によって容易に解消する。角運動量の任意の方向の成分 l_z の固有値はすべて $m\hbar$ であるから、l_z を測れば $m\hbar$ のどれかの値をとる。しかし、角運動量のいろんな方向の成分は特別な場合（すべての成分が0の場合）を除いて交換可能ではないから、ある方向の成分が確定した状態では他の方向の成分は不確定で、そのいろんな $m\hbar$ 状態の重畳した状態にある。したがって電子は、なにもわれわれがかってに選んだ座標軸に関していつも（観測に先立って）方向量子化せねばならぬ必要はない。しかしながら、もしその方向の成分を測るならば、$m\hbar$ のうちのどれか一つの値が得られるのであり、中間の値を得ることはない。そしてそのさい、いろんな $m\hbar$ の値はきまった頻度比で得られる（シュテルン－ゲルラッハの実験）。

あるいは波動関数のボルン解釈の場合の困難としてのべたこととして、位置測定において、古典的には運動エネルギーが負になるような領域にも粒子がある確率でやってくるということがあった。いまの解釈では、粒子の位置測定にさいしてこれに不確定の運動量、したがって不確定のエネルギーが供給され、この不確定さはそのような領域で古典的にも運動エネルギーが正になるほどのものであるということからして、それは別に困難を意味しないのである。

§11・6　中間的まとめ

とにかく、以上でわれわれは量子力学の基礎概念と基礎法則、数学的枠組とその物理的意味づけ、さらにそのコンシステントな解釈が達成されるに至ったことをみた。

量子力学においては、状態相互の関係、物理量相互の関係、状態と物理量と測定値との関係が、すべて古典論の場合とまったく異なること、そのことに相当して状態の概念も物理量の概念も、したがってまた、このような概念によって規定される電子というような物理的実体の性格も、まったく変革されるということが本質的であった。それは形式的にいえば、状態ベクトルの重畳性と物理量演算子の非可換性、そして状態と物理量から測定結果が媒介される関係（固有値方程式と確率の式あるいは期待値の式）にあった。そのほかに、状態と物理量とがはっきり区別されることに応じて、そのいずれについてでも表現することのできるところの運動方程式がある。理論のこのような形式が、粒子－波動の二重性、不確定関係、観測による攪乱と非因果的変化、観測の両立性と排他性、連続と不連続、定常状態と遷移、統計的法則性、部分系の状態と全体系の状態との非古典的な関係、古典論との極限的一致、などの量子的世界に特徴的ないろいろの面を、いかに包括し緊密に統一しえているかを把握するならば、量子力学は理解されたといってよい。そして古い量子論の時代からの、たとえば光量子とか、エネルギー準位、遷移、縮退、方向量子化、仮想振動子、スピン、*LS* カップリング、ゼロ点エネルギーなどといった言葉に加えて、仮想状態（あるいは中間状態）とか量子的揺動とか、散乱振幅、量子的共鳴、交換相互作用、分子軌道、スピン波、フォノン、穴、パリティ、アイソスピン、クーパー・ペア、コヒーレント状態、超選択則、……などといった奇妙な言葉で語ることもできるようになるだろう。のみならず、さらに進んでは、漸近場だとか、密度行列だとか、プロパゲーター、形状因子、*S* 行列、カレント演算子、……といった道具立てで語ることもできるようになるだろう。

われわれは作用量子 h というただ1個の普遍的な自然常数の存在が、いかに深く全面的に古典論の基礎概念をつくりかえ、法則の見方を改めることを要求したかをたどってきた。h を受け入れるには非可換的代数あるいは無限次元複素空間の幾何学というようなむつかしい量子運動学の道具立てを構築せねばならなかったし、h の有限性のために観測における部分的に制御不可能な攪乱というものを考慮に入れねばならなかっ

た。それでも量子力学は相補的な量の認識にもとづく古典論の自然な変革という意味をももっていることを理解することもできたのである。

ここで念のため、こうして出来上がった量子力学の一般的理論体系を総括すると、ほぼ次のようになる。

(i) ある‘物理系’に対応して、一つの複素数の線型ベクトル空間がきまる。この空間は、その任意の二つのベクトル ψ、φ に対して内積 (ψ, φ) が定義され、とくにノルム (ψ, ψ) が正(または0)なものであり、つまりヒルベルト空間である。そしてこのヒルベルト空間の一つの“射線”(ray)には、この系の可能な状態(“純粋状態”)が対応する。射線というのは、あるベクトル ψ とそれと同一‘直線’上にあるすべてのベクトル $\lambda\psi$ (λ は複素数)の集まりである。そのような ψ はゼロベクトルではありえないから、そのノルムは正である。このベクトル空間の線型性は状態ベクトルについての重畳の原理を意味し、一般的な“波動性”の側面を表わしている。

系の観測可能な物理量(オブザーバブル)A, B, ……には、この空間の任意のベクトルに働く“自己共役な”線型演算子 A, B, ……が対応する。(23) そのどれか一つ A の固有値スペクトルを $\{a_k\}$ とし、a_k に属する固有ベクトルを $\varphi_{k,r}$ (ここに r は縮退の添字)とする。すなわち

$$A\varphi_{k,r}=a_k\varphi_{k,r} \tag{11–12}$$

$\varphi_{k,r}$ 全体の集まりはヒルベルト空間の完全系を張っている。

とくに系が1個の(量子力学的)粒子である場合には、その位置と運動量に対応する演算子について(同時刻において)

$$[x_i, p_j]=i\hbar\delta_{ij} \tag{11–13}$$

なる交換関係が成り立つ。そして他の物理量には古典論の場合と形式的

(23) 物理量と対応する演算子は別の記号を用いるべきであるが、ここでは便宜上同じ記号ですませた。

に x、p の同じ関数である演算子が対応する。状態空間はこれらの演算子の代数の表現空間に相当する。x、p は上の交換関係のため非有界な演算子であり、ヒルベルト空間は無限次元である。

質点系については、(11–13) は

$$[x^{(r)}{}_i, p^{(s)}{}_j] = i\hbar\delta_{rs}\delta_{ij} \tag{11–13′}$$

に拡張される。しかし量子力学の枠組では、粒子が位置と運動量以外に他の基本的な物理量をもつことも可能であり（スピン）、また元来粒子系ではないような力学系を想定することも可能である。

(ii) 任意の状態で物理量 A を測定するとき、その固有値 a_k のどれか一つの値が得られる。$\{a_k\}$ は離散的であったり連続的であったり、また両方を併有したりするが、離散的なときはこの量の不連続性を現出する。

系が ψ で表わされる状態にあるとき、A を測定して a_k を得る確率がきまっており、それは

$$w_k = \sum_r |(\varphi_{k,r},\ \psi)|^2 \tag{11–14}$$

である。ここに ψ も $\varphi_{k,r}$ も規格化されているとする。

ψ の状態で A の（第一種の）測定を行なって値 a_k を得た場合、測定直後に系の状態は $\varphi_{k,r}$ の張る部分空間への ψ の射影に遷移している。この意味で測定は系の状態に部分的に制御不可能な攪乱を加える。

量子的粒子について、その粒子性の側面は (ii) に含意されている。

(iii) 系の状態ベクトルは（観測をしない場合）、時間とともに

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt} = H\psi \tag{11–15}$$

に従って連続的・因果的に変化する（シュレーディンガー描像）。H は系のエネルギーを表わすエルミート演算子であり、(11–15) は全確率の保存（ユニタリー性）および重畳の原理に合致する。H の関数形は系の構造を反映する。（系が古典的対応物をもつ場合、H は(i)でのべたよう

に系の基本的な力学量の関数として、古典論の場合と形式的に同じ形である。)

Hの固有状態（固有値Eなる）では、ψ は（シュレーディンガー描像で）時間に

$$\psi(t)=\psi(0)e^{-iEt/\hbar} \tag{11-16}$$

で依存することになり、定常状態を意味する。(11-16) は、そこでは ψ がドブロイ振動数 $\omega=E/\hbar$ で単振動することを示している。

時間的変化は、(11-15) のかわりに、ψ は動かないで物理量が

$$\frac{dA}{dt}=\frac{i}{\hbar}\left[H,\ A\right]+\frac{\partial A}{\partial t} \tag{11-17}$$

で変化するとみることもできる（ハイゼンベルク描像)。

(i)(ii)(iii)は、古典論と量子力学の間の対応原理を含んでいる。

(iv) 合成系のヒルベルト空間は、各成分系のそれのテンソル積である。このことは、合成系について重畳の原理が成り立つべきことと、対応原理がみたされるべきこととから要求される。(iv)はシュレーディンガー表示でいえば、波動関数が一般には配位空間の一般の関数であることを意味する。ただし同種粒子については、波動関数はいれかえに対し対称なもの（ボース粒子)、または反対称なもの（フェルミ粒子）に制限される。

さて、ここで行列力学をふりかえってみると (§6・2参照)、そこでの(II)、(III)はいまの (11-12)、(11-17) にほかならない。ただもとの行列力学では ψ がかくされているために、確率を一般的に与えることができなかった事情がわかる。行列力学の(I)、(IV)、(V) は H を対角型にする表示をとっていることによっている。

他方、上の体系が波動力学とその確率解釈を一般化・抽象化したものであることは明らかである。すなわち、交換関係 (11-13) の具体化として

$$x_i \to x_i \times, \quad p_i \to \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

をとり、内積を

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi^*(x)\psi(x)dx$$

と同定することにより、上の体系はただちに波動力学にもどる。(11–13′) の場合についても同様である。そのとき (11–15) は、時間によるシュレーディンガー方程式にほかならず、(11–12) においてAとしてHをとったものは、時間によらぬシュレーディンガー方程式にほかならない。

なお上にまとめた量子力学の一般的なスキームを概観して、それが古典論の場合と異なる最も一般的な特徴として次の点があげられる。まず第一に、その基礎法則の表現自体のなかに（すなわち、そのうちの(ii)に)、観測という言葉が不可避的な形で入ってくるということである。(古典論の場合は、基礎法則自体は、座標系への依存という点を別とすれば“観測”に言及することなしに表現できた。) このことは、ミクロな系を記述する量子力学は観測を通じて“古典的レベル”へ訴えることによって、はじめて意味づけを得るという事情に関連している。

第二の特徴は、系の状態ベクトルは、観測しなければ(iii)によって連続的・因果的・可逆的に変化し、他方、観測にさいしては(ii)により不連続的・確率的・非可逆的に変わるという、古典論にはみられなかった独得な二元論的性格をもっていることである。この二通りの変化がどのような意味でコンシステントであるかという問題がそこには伏在していることになる。この点の解明は、ノイマン以後「観測の理論」の眼目となるものである。

第三に、上のスキームにおいては、時間と空間的な量の入り方が同列でないということがあげられる。すなわち時間は(iii)においてパラメターとして出てくるので、量子力学ではつねに予想されているわけであるが、空間的な量は粒子系についてはオブザーバブルとして出てきている。より一般的には、観測装置は古典的で時空的記述が可能でなければならぬ

ということのために、装置の変位や回転に対する系の状態ベクトルのふるまいがきまらねばならないということを通じて、系自身がやはりつねに空間に関係した運動量や角運動量などの量をもつべきことになる。とにかく上のスキームにおいて時間と空間の入り方が著しく異なることは、相対論的な量子力学に進もうとするとき新たな問題を生じることを予想させる（この点に関しては第14章参照）。

第12章　スピン・排他律・対称性

量子力学の成立は行列力学とシュレーディンガー理論ではじまった（第6・8・9章）が、この第一段階について、より一般的な形式（変換理論）が形成され不確定性にもとづく解釈が成立する段階（第10・11章）があり、それまでのことについてわれわれは前章までにのべてきた。量子力学の基本原理はこれで本質的に把握され、話は一段落したようにみえるが、このあとには量子力学のさらに新たな段階への発展がある。量子力学の原理はあくまで一本であるにかかわらず、この発展によって量子力学は、同時にそれ自身がいわば一種の階層的な構造をもった壮大な体系となるのである。以下の章において、この新しい段階——ただしその初期1928—35年ころを主とする——の話に入るが、まず本章ではその予備として、このような段階への発展のきっかけとなった問題の一部についてのべる。

量子論の誕生と成長の過程は、主として統計熱理論の問題や、光と電子の相互作用の問題にかかわっていたし、また特殊相対論も量子論の成長に重要なかかわりをもったのだが、行列力学や波動力学の最初の発見・形成は、これらの問題とのかかわりが、いったんそこで分離されえたことを通じてはたされたという点をとくにわれわれは先に（第6—10章）強調した。同様のことは、スピン・排他律・同種粒子の統計性の諸問題に関してもいえる。すなわち、これらの諸問題も、量子力学の一般法則の問題とからまって前期量子論の末期に登場してきたのだが、それらを新力学の一般法則の問題からいったん分離した形において、行列力学や波動力学の最初の発見がはたされたわけである。こうして最初の行列力学や波動力学は、まず自由度が少なく粒子数の変わらないような、ごく簡単な力学系についての非相対論的な理論の領域で見出されうちたてら

れた。

しかし、行列力学ないし波動力学がこうして成立するや、元来、量子論と深くからまってきたそれらの諸問題、すなわち

(i) スピン、排他律、統計性

(ii) 輻射場およびそれと電子との相互作用

(iii) 相対論化

が新理論のなかにどう定式化されるかという問題が、改めて直ちに意識されたのは当然である。

これまでの量子力学の形成過程においては、概念を変革し、量子力学の一般原理・一般法則を見出すということが最も本質的な問題であった。しかし、いまやこれがほぼはたされたので、今後はむしろこの新量子力学を武器として現実のミクロの世界の構造を探究し、暴露していくという面が中心的なモチーフとして次第に浮上しクローズアップしてくることになる。上記の(i)、(ii)、(iii)の諸問題も、そのような現実の世界の構造ということに密接に関連している。他面、この(i)、(ii)、(iii)は相互に内面的な関連性をもっている。(たとえば'スピン'は量子力学と相対論をつなぐかなめとなり、'統計性'は粒子の理論と場の理論をつなぐかなめとなる、など。)こうしてそれらは量子力学自体の形式的発展と適用領域の拡大のうえでも本質的な意味をもち、実際それによって量子力学自体が新たな段階へ上昇することになるのである。しかし本章はその序の口として、まず(i)に関係した問題をのべる。

上記の(i)をとり入れるということが、量子力学にとってミクロの世界の現実的な問題に対処していくうえで直ちに必要なことは前にも強調した。電子にしろ陽子にしろ$\frac{1}{2}$のスピンをもつ粒子であるし、また水素原子を別とすれば、He 以上の原子や分子、あるいは固体はすべて複数の電子を含んでいて、つねに排他律の規制をうけているわけであり、また排他律の適用にあたってはスピンの自由度の存在をつねに勘定にいれねばならぬため、スピンは排他律を介しても効果を現わす。あるいは水素分子のような場合は、それが2個の同じ陽子を含むということのためにも同様の事情が働くことになる。

さて行列力学ができたとき、ハイゼンベルク－ヨルダンがこれにスピンをとり入れたことについては前にのべた。スピンの量子力学的あつかいのためには、しかし“波動的”側面——あるいは重畳の原理——も当然本質的な意味をもつはずであり、波動力学的あつかいを行列力学的あつかいに組み合わせるべきである。それは必ずしもまったく新しい種類のことでもなくて、波動光学において偏光に関する重畳の原理として周知なことに類似したことなのである。つまり光の場合、二つの直線偏光（あるいは二つの円偏光）を重ねて一般の楕円偏光をつくりうるのとアナロガスに、電子のスピンについて、その上向き状態と下向き状態を複素数の振幅でもって重ね合わせることにより、その任意の向きの状態がつくられる。スピンについての“波動的”側面はすぐあとでのべるハイゼンベルクの仕事でまず用いられたが、より完全な定式化はパウリによってはたされることになる。

他方、同種粒子の統計性については、行列力学はまだこれをそのなかにとり入れるすべをしらなかった。しかしながら、行列力学の実証主義的立場は潜在的にはこの問題の正しいとらえ方に通ずるものであったといえよう。電子が互いに同一で原理的に見分けえないということは、実証論的立場からするならば電子は個別性をもたないということ、すなわち電子を互いにいれかえた二つの状態は、じつは同じ一つの状態とみねばならぬということと同じである。実際シュレーディンガー理論が出たとき、ハイゼンベルクまたディラックはいち早くこういう考え方をしつつ、電子のような同種粒子に対する排他律をいれかえに対する波動関数の反対称性としてこの理論のなかに収容することができた。

ところで外磁場がない限り、またスピン－軌道結合のような弱い相対論的効果を無視する限り、荷電粒子系のハミルトニアンはもっぱら静電的なクーロン項だけでスピン演算子を含まないので、系の波動関数はスピンによる因子と座標のみによる因子とに分解し、後者は従来の単純なシュレーディンガー方程式に従うわけである。このことが、スピンを考慮しないシュレーディンガー方程式でもってかなり多くのことが説明できたそもそもの理由であった（たとえばシュレーディンガーの水素原子

の理論の成功)。この場合、ハートリー的1体近似の立場では、スピンの存在はただ各電子の状態の数を二重にするだけであり、このため 2^N (N は電子の数)の縮退("スピン縮退")をもつ。しかし次に電子間の静電相互作用を考えると、スピンの影響が排他律を介して'交換相互作用'という形をとって現われてくることになり、"スピン縮退"の一部(一種の"交換縮退")が全スピンの固有値 S に従って解かれ、異なる多重項間の分岐を生じることになる。このことの認識は広い視野をひらくことになる。

以下で簡単に、これらの重要な発展についてのべることにする。

1926年6月と7月の二つの論文でハイゼンベルクは、波動力学的記述において2個の同種粒子からなる系のもつ特殊な性質に注目した。このような系の状態は、粒子をいれかえてもまったく区別のつかない状態にとどまるが、そのことは量子力学の精神からすれば同じ一つの状態とみなすべきであり[(1)]、したがって、その状態を表わす波動関数はいれかえによって変わらないか(対称的)、符号をかえるか(反対称的)のいずれか一方だけのはずである。この場合、ハミルトニアンをはじめとして、系の観測可能な物理量はすべて粒子のいれかえに対して対称的であり、対称的状態と反対称的状態が互いに移りあうことはなく、その一方しか存在しないという考えは量子力学とよく調和する。ところが、いま反対称的な波動関数だけが存在するという仮設をえらぶと、パウリの排他律が自働的にみたされる結果になることがわかるから、排他律はいまや波動関数の反対称性としてとらえなおされるべきである。

これにもとづいてハイゼンベルクは、He 原子の定常状態を考察した。その2個の電子はそれぞれ $\vec{s_1}$ および $\vec{s_2}$ なるスピン・ベクトルをもっている。そして2電子系の状態は、弱いスピン-軌道結合を無視する限

(1) 量子力学における同種粒子の識別不能ということは、粒子が接近するときそれぞれの粒子の軌道を追っていけないということによっており、粒子についての不確定性あるいは波動性ということと調和している。

り、スピン状態と軌道運動とを独立に考えてよいが、前者は4個あり、それは“スピン座標”について対称的な

$$\begin{cases} \alpha(1)\alpha(2) \\ \beta(1)\beta(2) \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\alpha(1)\beta(2)+\alpha(2)\beta(1)\Big) \end{cases} \tag{12-1}$$

なる3個と、反対称的な

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)\Big) \tag{12-2}$$

なる1個にわけることができる。((12-1)、(12-2) は同時に合成スピン S の $S=1$ および $S=0$ の状態になっている。) それゆえ全波動関数の反対称性としての排他律の要求をみたすには、(12-1) のトリプレット (3重項) には軌道運動の反対称波動関数をかけるべきであるが、それは電子間の静電相互作用を無視する近似では

$$\varphi_a(x_1, x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\varphi_m(x_1)\varphi_n(x_2)-\varphi_m(x_2)\varphi_n(x_1)\Big) \tag{12-3}$$

である (ここにたとえば $\varphi_m(x_1)$ は第1の電子が m -“軌道”にある状態を表わす)。同様に (12-2) のシングレット (1重項) には、対称な

$$\varphi_s(x_1, x_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\varphi_m(x_1)\varphi_n(x_2)+\varphi_m(x_2)\varphi_n(x_1)\Big) \tag{12-4}$$

をかけるべきである。それで φ_a にしろ φ_s にしろ2個の電子の軌道運動は相関をもつ。ところで2個の電子間の相互作用を無視しているあいだは、この二組の状態は同じエネルギー E_0 に縮退しているが、実際は電子間に静電斥力があるためにエネルギーが全体として E_0 よりもち上がるのみならず、同時にトリプレット ('オルソ・ヘリウム') とシングレット ('パラ・ヘリウム') の間の縮退がとれ、トリプレットのほうが下に出ることになる[(2)]。なぜなら (12-3) の軌道は反対称的で (12-4) の軌道に比して両電子が接近する確率が小さく、したがって静電斥力の寄

(2) 基底状態 $(1s)^2$ はもちろんシングレットに属する。

与が小さくてすむからである。この効果は“交換積分”で表わされ、スピンの存在、パウリ原理、静電力が協同して生じた本質的に波動力学的効果であるが、結果としてあたかも二つのスピンの間の力のように現象する。[(3)] しかも、それはもともと静電的な力に由来するものであるので値が大きいのである。

さらに、いまスピンのみまたは位置座標のみのいれかえに対する対称性も近似的に成り立っているために、そのようないれかえの演算子（したがってまた合成スピンS）は近似的な運動の恒量であり、したがってシングレット状態とトリプレット状態の結合は非常に弱い。電気双極モーメントの演算子もスピンを含まないから、これによるオルソ－パラ間の遷移の行列要素もゼロである。実験的にオルソとパラがあたかも二種類の He のようにみえたのは、この選択則のためであることがわかる。前期量子論では、スピンの導入によって微細構造と異常ゼーマン効果は説明されたが、もっとあらい He の1重項と3重項の分離はついに説明できなかった。それがいま交換相互作用として波動力学的に解明されたわけである。[(4)]（やがて原子価結合や強磁性も同様に交換相互作用によって解明されることになる。）

ディラックもまた、シュレーディンガー理論が出てまもなく、これでもって同種粒子の系をあつかうことに進み、同様の事柄に気づいた（た

---

(3) この力はエネルギーでいって

$$-\frac{K}{2}(1+\overrightarrow{\sigma_1}\,\overrightarrow{\sigma_2})=-K\{S(S+1)-1\}$$

と表わされる。ここにKは交換積分であって、$K/\hbar$ は2個の電子がその軌道をいれかわる振動数と解される。さらに上の$\frac{1}{2}(1+\overrightarrow{\sigma_1\,\sigma_2})$ なる量はスピンをいれかえる‘置換演算子’（$P_{12}{}^{\sigma}$）という意味をもっている（ディラック）。また二つのターム系が合成スピンSでラベルされるということは、スピン関数が置換群と回転群について同時に簡約されることを意味している。

(4) ハイゼンベルクのこの論文は以後のいくつかの重大な発展のいとぐちとなったものであるが、彼自身の論文は“スピン座標”の定義についても、また電子のいれかわった状態の間の“共鳴”についても、アナロジーで思考を進める点が特徴的である。

だしまだスピンは考えていない)。この場合、任意個の同種粒子の系の波動関数は任意の2個の粒子のいれかえに対して対称かまたは反対称なものしか許されないと考えることができること、光量子やアインシュタインの考えたような単原子気体[5]には前者が当てはまり、これがボース統計を意味すること、電子には後者が当てはまり、そのことからフェルミの分布式に導かれることを彼は明らかにした[6]。このように同種粒子に対する二種の統計を、粒子のいれかえに対する波動関数の対称性(完全対称または完全反対称)に結びつけたということは、波動力学が両統計を単にエレガントにむかえいれたという以上に、むしろそれを根拠づける方向に一歩前進したといってよいことである[7]。この点は、その後の理論の発展でさらに深められることになる。

ここでなお、次の点を注意しておこう。同種粒子の波動関数が対称状態のみ(または反対称状態のみ)をとるということは、一種の "conspiracy" (共同謀議)ともいえるが、同種粒子がボース統計に従う場合にもフェルミ統計に従う場合にも、各粒子の波動関数が位置-スピン空間で重なりあわず幾何光学的近似が成り立つようなときには相違が現われず、ともに対応原理をみたすことである。また、ある空間領域の内部にある同種粒子系に着目し、その内部での観測のみを考える限り、この領域の外部の同種粒子の存在は――それと内部の粒子との相互作用が無

(5) 実際 He 原子やその原子核(α 粒子)にはボース統計が当てはまる。

(6) ディラックはフェルミの仕事を引用することをおこたり、後者から注意をうけた。なおスピンをとり入れてフェルミ統計を考えることはパウリ(1926年12月)によってはじめてなされた。ことに彼は金属中の自由電子ガスがフェルミ統計の意味でほとんど'縮退'していることにもとづいてアルカリ金属の常磁性を説明した。ローレンツ(1905)やボーア(1911)以来暗礁にのり上げていた金属電子論はこの仕事によって息を吹きかえし、量子力学とフェルミ統計にもとづく新しい展開がはじまった(ゾンマーフェルト、フレンケル、ブロッホ F. Bloch、ブリルアンらによる)。他方ファウラーは、フェルミ統計によって白色矮星の謎を解くアイディアを同じころ提出した(1926)。

(7) すべての置換の同時固有状態(すなわち置換群の1次元表現)であると仮定する限り、この二つの可能性しかない。

視できる限り——影響しない、ということが示されることである。

さてハイゼンベルクは、さらに二つの等しい核をもつ分子（水素分子 H_2 のような）の回転運動をとりあげた（1926年12月）。これは、この分子のバンド・スペクトルや回転比熱として実験に顔を出すことは前にのべた。ところで水素分子の場合、その二つの原子核である陽子は、電子の場合と同様、排他律に支配されると考えられる。つまり、この二つの陽子について波動関数は反対称的でなければならない。また陽子は電子と同様スピン $\frac{1}{2}$ をもつと仮定するのが自然である。それで再びスピンのトリプレット状態（12–1）にかかる軌道波動関数は反対称でなければならないが、そのためには、それは2個の陽子の相対的な回転について軌道角運動量の量子数 l が奇数（$l=1, 3, 5, \cdots\cdots$）の状態であるべきことになる（"オルソ水素"）。またスピンのシングレットの状態（11–2）にかかるべきものは l が偶数（$l=0, 2, 4, \cdots\cdots$）の状態でなければならない（"パラ水素"）。それゆえオルソ状態はパラ状態に比して3倍の割合の数があり、かつ両者の間の結合はきわめて弱い。このことにもとづいて、水素分子のバンド・スペクトルに強度の交替がおきる事実や、その比熱の低温での異常などが説明できる[(8)]（フント、デニソン D. M. Dennison ら）。

量子力学の成長とともに一般に"対称性"ということがそこで重要な意義をもっていることがぼつぼつ認識されはじめた。スピンや排他律も対称性と関連する事柄なのであるが、さらに一般的に量子力学によってミクロの世界の構造を解明することに進むとき、種々の対称性がことに重要になってくるのである。

すでに先の「三者論文」は実質的に回転群の生成子（つまり角運動量）

---

(8) 水素分子については、その回転状態を考える前に、そもそもどうしてこういう化学結合（等極結合）が生じるかという問題がある。これは電子状態に関係しており、He 原子の場合に似た交換エネルギーの考え方で同じころハイトラー－ロンドンにより説明された。

の表現を含んでおり、またパウリによる水素原子の行列力学はこの系のもつ高次対称性を利用していたわけだが、それらの仕事では連続群に対するリー代数をあつかっていたこともあって、まだ対称性の群論的把握——すなわち、ある対称性は一群の変換に対する不変性であり、それらの変換はある“群”をつくるという自明的な事柄——も、またそれと保存量との関係なども、あまりはっきり意識に上っていなかった。[9]

しかし、ついで波動力学が出てのち、対称性の重要性がまず同種粒子の問題における粒子のいれかえに対する対称性——すなわち置換群(“対称群”)——を通じて意識に上ってきたわけである。すなわち前記のハイゼンベルクの He 原子のあつかいにおいて、2電子系についていれかえに対する対称性とその表現が問題になっており、しかもスピンのみのいれかえ、位置座標のみのいれかえに対する(近似的な)対称性も問題になっていて、その表現による固有状態の分類、その結合関係の問題が顔を出している。ウィグナーはこの仕事を拡張していくうえで群論を利用することをはじめた。すなわち3個以上の電子の場合について置換群の要素は一般に可換でなくなり、許される状態を分類しようとすると問題がだいぶ複雑になってくるが、ウィグナーはこれを見通しよく行なうために、フロベニウス G. Frobenius やシュール I. Schur ら数学者によって発展させられてきた置換群の表現とその既約表現への分割をもち込んだ(1926年11月)。

ついで彼は連続群である回転群に目を転じ、その研究によって原子の量子力学における回転対称性の意義を明らかにした。角運動量成分 J_i はユニタリーな回転演算子 R の生成子であり、その交換関係(6-27)は回転群に対する運動学的考察から直接に、しかも一般的に出てくるものなのである。(これはスピンをも含めていえることはのちに示された。)ま

(9) 古典論のレベルでは、対称性の群論的把握は、たとえば結晶の場合について行なわれていた。また特殊相対論はローレンツ群に対する不変性を意味することはもちろん認識されていた。対称性と保存量の関係についてのネーター E. Nœther の定理もすでに出されていた。

た縮退した固有状態の組がその既約表現のベースを意味している。

ウィグナーはさらに空間反転の対称性（左右の対称性）に注目した。これは古典論において成り立っており、したがって対応原理により量子力学においても成り立つはずである。ところが量子力学においては空間反転は一つのユニタリーでエルミートな演算子P（したがって、それは$P^2=1$ をみたし、± 1 の固有値をもつ）で表わされ、一つのオブザーバブルとしての資格をもつ（“パリティ” parity とよばれる）ことは古典論にみられない新しい事態である。しかも P は位置座標や運動量のような‘極性ベクトル’と反可換であり、角運動量のような‘軸性ベクトル’とは可換である。すなわち1個の粒子の場合については

$$\{P,\,x_i\}=\{P,\,p_i\}=0 \tag{12-5}$$

である(10)。そして一般に空間反転の対称性が成り立つ結果として、パリティの保存則が（掛け算の形で）成り立つことから、系のエネルギー固有状態が角運動量と同時にパリティで分類され、パリティの正のものと負のものとに分けうることになる。それに関する粒子の位置座標の行列要素 x_{nm} は、(12-5) によりパリティ正の状態と負の状態にまたがるものだけがゼロと異なる。ウィグナーはこのことにもとづいて、原子スペクトルに関する一つの選択則として経験的に知られていた「ラポルテ Laporté の規則」(1924) を演繹した（1927年5月）。（彼のこの仕事ではスピンはまだとり入れられていない。）

これらの研究を通じて、量子力学において対称性のもっている一般的意義、それの定式化としての群とその表現論の役割がウィグナーやワイ

---

(10) ここに $\{A, B\}\equiv AB+BA$ は A と B の「反交換子」を意味する。3次元等方振動子についてパリティは具体的に

$$P=i\exp\left[\frac{i\pi}{2\hbar}\left(m\omega\vec{x}^{\,2}+\frac{1}{m\omega}\vec{p}^{\,2}\right)\right]$$

で与えられる。これが (12-5) をみたすことは実際に確かめられる。量子力学において“反交換関係”はあとでみるようにほかにもいろんなものが登場してきて、それぞれ重要な役割を演ずることがわかってくる。

ル H. Weyl によって明確にされた。一般に系がある対称性（不変性）をもつならば、その対称性の変換の演算子あるいはむしろその（エルミートな）生成演算子はハミルトニアンと可換であるため保存量であって、そういう保存量の（互いに可換な）組をとるとそれらの固有値は“よい量子数”の組を与え、これでエネルギー固有状態が分類される。つまり系の定常状態は、その対称性を意味する変換群のもとでのふるまいに従って区分され、縮退した状態の固有ベクトルの組は、その変換群のユニタリー表現のベースになっている。表現が一般にユニタリー（ただし時間反転の場合は“反ユニタリー”）であるのは、対称性の変換であるためには確率は不変でなければならず、そのためには状態ベクトルは‘射影ユニタリーな’——しかし結局ユニタリー（または反ユニタリー）な——変換をせねばならぬからである。また摂動（外部からの、また内部的な）による縮退の除去は、摂動による対称性の低下によって、群の既約表現がその部分群のいくつかの表現に分解することに対応する。そしてそのさい選択則に導く。

対称性自身は一般法則（たとえば同種粒子の不可識別性に由来するいれかえに対する対称性とか、空間の等方性にもとづく孤立系の全体としての回転不変性など）や、系の特殊な力学的構造や、外からの摂動のタイプなどに由来するものであり、また対称性にはいれかえや空間反転のように離散的なものもあれば、並進や回転のように連続的なものもある。とにかく対称性が一般に不変群として定義され、その生成演算子の代数は行列力学あるいは“量子代数”のなかにうまくはまり、その表現論は波動力学にうまくはまるわけである。

じつは当時の状況では実際問題に群の表現論を用いることはいささか“牛刀的”にみえた。しかし「群論と量子力学」は、量子力学によって物理と数学との間に生じた新しい接触の典型的な例を表わしている。[11]

(11) ただし群論の猖獗が一時期ペスト視された。（物理ではこういう‘jocular’な言い方がよく使われる。）

さて1926年末の変換理論の成立によって、一般的でフレキシブルな量子力学の体系が出来上がったので、この基礎によって量子力学のいくつかのよりすすんだ基本的な問題が有効に追求されることとなり、1927年の前半の間に重要な進展をみることになった。その一つは前にのべたハイゼンベルクの不確定関係であるが、もう一つはパウリによる電子スピンの定式化であり、さらにもう一つはディラックによる輻射場の量子力学と「第二量子化」である。ここではパウリの理論について簡単にのべ、ディラックの仕事については次章でのべることにする。

先にハイゼンベルクは He 原子の仕事で電子のスピン波動関数 α、β を導入したが、パウリ（1927年5月）はスピンの自由度を考慮した電子の波動力学をいっそう体系的に定式化するために、1個の電子に対し2成分波動関数

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1(x,t)\\ \psi_2(x,t)\end{pmatrix} \tag{12-6}$$

を導入し、これでもって電子の状態を記述する。2行2列のスピン行列 $s_i=\dfrac{\hbar}{2}\sigma_i$[12]　$(i=1,\ 2,\ 3)$ は、この“列マトリックス” ψ に働くものとなる。

系のハミルトニアンは先にハイゼンベルク－ヨルダンによって与えられているから、それと（12-6）を用いて、この場合のシュレーディンガー方程式をすぐ書き下すことができる（それは“パウリ方程式”とよばれる）。ところで座標系の回転に対して、2成分波動関数（12-6）は、その回転を表わすケーリー－クライン Cayley-Klein のパラメターで構成されるある2行2列の、そしてその行列式が1であるようなユニタリ

---

(12) σ_i なるマトリックスはじつはスピンの場合に限らず、二値の変数（“dichotomic variable”）――アイソスピン、フェルミ粒子の占有数など――が問題になる場合にはいつでも有用なマトリックスである。なおパウリは $\{\sigma_i\}$ が ‘quarternion’（四元数）に相当することを注意している。つまりそれは

$$\{\sigma_i, \sigma_j\}=2\delta_{ij}$$

なる反交換関係をみたす。

一行列

$$U=\begin{pmatrix}\xi & \eta \\ -\eta^* & \xi^*\end{pmatrix} \qquad (\xi\xi^*+\eta\eta^*=1) \tag{12-7}$$

によって

$$\psi'_\alpha(x')=U_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

のように混じり合う。[(13)] そのことによって理論の回転対称性が保証されるようになっていることがわかるのである。そして、じつは回転に対する波動関数のこのようなふるまいが、電子が$\frac{1}{2}$の固有角運動量（スピン）をもつことを意味しているのである。先にワイル（1925）は$j=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, ……に相当して回転群の2価の既約表現（$D_{1/2}$, ……）が存在することを見出していたが、上記のUはちょうどそのような$j=\frac{1}{2}$表現になっており、パウリのψはこの表現のベースである。[(14)]

換言すれば、パウリのψは"固有角運動量密度"を意味する軸性ベクトルΣ_iを

$$\Sigma_i=\psi^*\sigma_i\psi$$

の形に"因数分解"せしめるような3次元回転の新しい共変量であって、のちに"スピノール"(spinor)と名づけられた。[(15)] このスピノールは、じつは回転群と局所同型なSU(2)群の表現のベースを意味している。このような回転群の2価の表現が物理的に許されるということは、量子力

---

(13) パウリーマトリックスσ_iはこのSU(2)マトリックスUの生成元に相当する。

(14) このことはノイマン-ウィグナー（1928）によって注意された。

(15) ハイゼンベルク理論における行列の場合のように、スピノールも物理学者によってその必要上発明されたが、それ以前に数学者によってすでに考えられていた。すなわちフランスのカルタン E. Cartan (1913) は一般のn次元空間の回転群の線型表現のベースとしてそれを導入し、それが2^ν（ここに$\nu=\frac{n-1}{2}$または$\frac{n}{2}$）個の成分をもつことを示した。いまこれがスピンの量子力学的記述の問題を通じてパウリによって、ついでディラック（第14章参照）によって改めて再発見される。

学において ψ は複素数であり、その双1次な量（$\psi^*A\psi$ 型）——それは実数であり、1価であり、テンソル的（スカラー、ベクトルなど）である——のみが観測に対応する数（確率、期待値など）を表わすことによっている。[16] SU（2）の表現のベースとしてのスピノールは本質的に複素数であって、このことは量子力学において波動関数が元来本質的に複素数であったこととよく調和しているのである。とにかくこうして量子力学では、波動関数に対して、3次元回転に対する共変量としてベクトルやテンソルに限らずスピノールがすべて許されるということになる。これは量子力学の一般原理と回転群の性質のなかから生じた新しい事態であり、半整数スピンが理論のなかに自然にとり入れられることになった。

このパウリの理論は、スピンを“非古典的二値性”とみた彼のもともとの立場（第5章参照）を具体化するゆき方になっていながらも、スピン－軌道結合についてはトーマスのスピンの古典論にもとづいてそれを対応論的に導入している点で、なお hybrid（混成的）で折衷的な性格をもっているわけである。

パウリのスピン電子の波動力学を排他律を考慮しつつN個の電子系の場合に拡張することは容易であり、こうして多電子系の非相対論的量子力学の定式化が完成する。ノイマン－ウィグナーはそれにもとづき、置換・回転・反転の対称性にもとづく群の表現論によって原子スペクトルの問題をいまや系統的に処理した[17]（1927—28）。

以上のような仕事を通じて、一般に対称性は量子力学においてはその重畳の原理のゆえに、古典論あるいは前期量子論におけるよりもいっそ

（16）パウリの $\psi_\alpha(x)$ は、各 x 点ごとにこの3次元物理空間でのスピノール量であると同時に、そのノルムが $\sum_\alpha\int\psi_\alpha^*(x)\psi_\alpha(x)dx$ で与えられるようなヒルベルト空間のベクトルのシュレーディンガー表示でもあるという二重の性格をもつことを注意すべきである。

（17）しかし、この種の問題を置換群の表現論によることなしにより簡単に処理する方法が、やがてディラック、スレーターらにより展開される（1929）。

う緊密に理論のなかに統合されるということが認識された。たとえば前期量子論で「ベクトル・モデル」などによって説明されていたような多くの事柄は、いまや回転対称性の見地からとらえなおされる。角運動量の合成則、多重項、間隔則、選択則、強度則なども、対称性とその摂動による一定の仕方での破れの見地から系統的に導かれることになる。

なお量子力学のその後の展開、新しい領域への発展においてさらに他のいろんな対称性の重要性が認識されてくることになる。時間反転の対称性、ローレンツ不変性、粒子－反粒子の対称性、アイソスピン回転の対称性、‘重粒子数’・‘軽粒子数’ の保存などであるが、その一部についてはのちにふれる。

第13章　粒子像と波動像の統一

われわれがまだ立ち入っていない重要な問題が一つある。それは、変換理論によってドブロイ－シュレーディンガーの波が確率振幅ないし状態ベクトルというものへ抽象化されてしまったが、元来ドブロイやアインシュタインやシュレーディンガーは光とのアナロジーで現実空間の物質波を考えたのであり、そのような意味の波動性はこの変換理論的な量子力学までいってもなんらかの形で残るべきではないか、という問題である。実際、われわれは光については、それを現実空間における古典的な電磁波とみなして説明できる広範囲の現象があることを知っているのである。

この点を解明するためには、一方において電磁場に対する量子力学をたて、それによって光についての粒子－波動二重性の意味を再考すべきであり、他方、一般に同種粒子の系が現実空間の波動場としてのふるまいをもつものではないかという推測を追求すべきである。実際、プランクの式が電磁場の量子化によって出る以上、それとアナロガスな単原子理想気体に対するアインシュタインの分布式（§7·2参照）もまた気体を表わす（現実空間での）物質波動場の考えから同様の手続きで出せるはずと予想される。とにかく、もしこのような波動場の考えが確立されるならば、光と物質とのアナロジーを新しいレベルで再現することになろう。

ところで電磁場の量子力学をたて、それと電子との相互作用を完全に量子力学的にあつかうという問題は、行列力学の最初の論文以来の懸案であったが、なかなか仕上がらなかった。古典的なマックスウェル理論は電磁場を独立した自由度としてあつかっている。したがって量子力学の一般原理により、この場の運動も対応原理に従って当然量子化されね

ばならない。まず「三者論文」は次のことを行なった。自由な輻射場をノーマル・モードに展開すると、その振動数ωなる一つの成分は同じ振動数の線型振動子と力学的に同等であり、したがってその振幅qは、量子力学では線型振動子の位置座標と同様の行列に格上げされるべきである。すなわち (6-12) により、

$$\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\,q_{n'n}=\begin{cases}\sqrt{n}\;e^{i\omega t} & (n'=n-1)\\ \sqrt{n+1}\;e^{-i\omega t} & (n'=n+1)\end{cases} \tag{13-1}$$

で、他の行列要素はゼロである。またこのノーマル・モードのエネルギーは $n\hbar\omega$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$) なる固有値をもち(ゼロ点エネルギーを落として)、これを $\varepsilon=\hbar\omega$ の光量子が n 個ある状態とみなすことができ、かつそのような光量子は当然ボース統計に従うことになる。行列力学は、しかし一般的な確率振幅の概念を欠いていたため、原子による光量子の放出・吸収の過程を記述することができず、単に自発放出の遷移確率を ad hoc に (5-8) 式で与えるとしたにとどまった。

ついで波動力学が出るにおよんで、前にのべたようにシュレーディンガーやクラインが原子による光の放出や分散を半古典的な見方である程度まであつかえることを示したが、ディラックは輻射場を外場として時間による摂動論でシュレーディンガー方程式を解くという、もっと正統な道をとった。こうして彼は誘導放出と吸収の遷移確率を出すことまではできたが、輻射場を外場としてあつかっているため、まだ自発放出を出す余地はなかった(これについては第9章で説明した)。

光と原子の相互作用の過程のもっと完全な量子力学をたてるには、電磁場を量子化する「三者論文」の考えと、状態ベクトルの時間的変化によって遷移を追跡するディラックの考えとを組み合わせることが必要である。そして、そのためのもう一つのお膳立ては、変換理論の成立によって任意の力学系に適用できるような量子力学の体系ができ、確率振幅としての状態ベクトルの概念が一般化され、かつまたハイゼンベルク描像とシュレーディンガー描像の相互の移行が明らかにされたことである。そこで光量子の数を独立な力学変数としてとり、この表示(“占有数表

示")における確率振幅を導入することによって、原子と光の相互作用を完全に量子力学の枠のなかであつかうことが可能になる。つまり輻射場の各ノーマル・モードが原子とカップルしたその全体の系を考え、ノーマル・モードの準位が上がったり下がったりするのといっしょに、それとカップルした原子の準位が下がったり上がったりするのが光の放出・吸収であり、この変化を量子力学的な意味で——つまり全体系の状態ベクトル(すなわち確率振幅)の時間的変化として——追跡すればよいわけである。(1)

これはディラックの1927年2月および4月の論文で実行された。いまハミルトニアンの相互作用の部分は、古典論でベクトル・ポテンシャルを——したがってノーマル・モードの振幅qを——1次で含んでおり、量子力学ではこれが(13-1)の行列になる。時間による摂動の方法でしらべると、1次の摂動において輻射場のノーマル・モードの状態がnから$n\pm 1$へ移る(同時に原子もそれに応じてある準位から他の準位へ移るわけであるが)ような遷移の行列要素をもつことは(13-1)から明らかであるが、その遷移確率は$|q_{n'n}|^2$に比例するため放出の場合$n+1$に比例することになり、ちょうど誘導放出と自発放出とを正しい比で含むことになる。

しかしディラックの仕事の特徴は、光の放出・吸収についてのこのようなあつかいだけでは満足せず、それを原子とアインシュタイン-ボース流の光量子の集まりとの間の相互作用という見方から基礎づけようとしたことである。そのために彼は一般的に、波動場の量子力学と、相互に自由なボース粒子の集団の量子力学とが、変換理論を通じて同等であることを示したのである。

まずシュレーディンガーの波動力学に従う1粒子系を考え、その波動

(1) これはシュレーディンガー描像での言い方であるが、同じことをハイゼンベルク描像(状態ベクトルは固定していて物理量を表わす演算子が時間とともに変わる)での言い方にもどすことができる。遷移振幅は行列要素であって、これはどちらの見方からしても同じである。

関数を $\psi(x, t)$ とする。系のある物理量の固有関数としての規格化された完全直交系 $\{\varphi_r(x)\}$ を用いて $\psi(x, t)$ を

$$\psi(x, t)=\sum_r a_r(t)\varphi_r(x) \tag{13-2}$$

と展開することができるから、$\psi(x, t)$ のかわりに各固有状態の振幅 $a_r(t)$ を用いることもできる。ところでディラックは、もし確率振幅を

$$\int\psi(x, t)^*\psi(x, t)dx=\sum_r a_r{}^*a_r=N \tag{13-3}$$

のごとく（1にでなく）Nに規格化しておくならば、この $\psi(x, t)$ なり $a_r(t)$ なりは相互にまったく独立な N個の粒子の系の運動を記述するものとみなしうるという見方をとり、これから出発する。ところがこの $\psi(x, t)$ あるいは $a_r(t)$ に対する（時間による）シュレーディンガー方程式は、形式的には

$$\overline{H}=\int\psi^*\hat{H}\psi dx=\sum_{r,r'}a_r{}^*H_{rr'}a_{r'} \tag{13-4}$$

をハミルトニアンとし、a_r と $i\hbar a_r{}^*$（あるいは ψ と $i\hbar\psi^*$）を正準共役な変数とみたときの古典的な正準運動方程式と同じである。（このことは、§8·4 でのべたシュレーディンガー方程式に対する物質場の解釈においても、その形式的基礎をなすことであった。）それで、ここで a_r と $i\hbar a_r{}^*$ の間に（したがって ψ と $i\hbar\psi^*$ との間に）正準交換関係をおいて、これらの量を“q-数”へ昇格させること（「第二量子化」）が示唆される。（そのさい $\psi(x, t)$ あるいは $a_r(t)$ は依然もとのシュレーディンガー方程式に従って時間的に変化している。）すなわち

$$[a_r(t), a_s(t)^*]=\delta_{rs} \tag{13-5}$$

をおく[2]。これは ψ に対していえば

$$[\psi(x, t), \psi^*(x', t)]=\delta(x-x') \tag{13-6}$$

---

(2) a_r は q-数になり、そのとき $a_r{}^*$ はそのエルミート共役を意味する（そのことを明示するには $a_r{}^\dagger$ と書くほうがよいが）。

を意味する。あるいはまた a_r、$a_r{}^*$ のかわりに

$$a_r=\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(q_r+ip_r\right),\quad a_r{}^*=\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(q_r-ip_r\right) \qquad (13\text{-}7)$$

で定義されるエルミート演算子 q_r、p_r を用いることもできる。すると (13-5) は

$$[q_r, p_s]=i\hbar\delta_{rs}$$

を意味し、q_r、p_r は互いに正準共役である。そして$\frac{1}{2}\left(q_r{}^2+p_r{}^2\right)$ なる量は調和振動子（$m=\omega=1$ にとった）のハミルトニアン演算子に相当するから、$\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)$ なる固有値をもつ。換言すれば

$$N_r=a_r{}^*a_r=\frac{1}{2\hbar}\left(q_r{}^2+p_r{}^2\right)-\frac{1}{2}$$

なる量は 0，1，2,……なる固有値をもつ。とにかく、いま a_r に (13-5) をおくことによってこれを“q-数”に昇格した結果として、$N_r=a_r{}^*a_r$、したがってまた (13-3) で与えられる $N=\sum_r N_r$ も q-数となるが、これは $N'=0$，1，2,……なる固有値スペクトルをもつことになり、最初Nを粒子の総数と考えて出発したことにうまくマッチしている。さらに任意の体積 V についてとった積分

$$\int_V \psi^*(x, t)\psi(x, t)dx$$

は、V 中に含まれる粒子数を表わす演算子になっていることがわかる。

元来 a_r あるいはψは状態ベクトルであって力学量ではなかったが、いま (13-5) あるいは (13-6) によって「第二量子化」したということは、これをもとの系と密接な対応関係をもつ、なにか新しい系の力学量に見直したということである。この新しい系というのは、もとの粒子の相互作用をもたない集団——そこで粒子は個別性をもたずボース統計に従うとする——であり、N_r が r-状態にある粒子の数を意味するようなものである、ということをディラックは明らかにしたのである。そのような系は元来多次元配位空間のシュレーディンガー関数を用いて表現されたものであるが、その場合ボース粒子であるため、このシュレーデ

ィンガー関数はいれかえに対して対称なものだけに制限されていた。他方、第二量子化の形式においては、a_r（あるいは ψ）は力学量になってしまうが、いまやこれら a_r が演算子としてはたらくべき状態ベクトル Ψ は別に存在せねばならず、これは $\{N_r\}$ を対角型にする表示では $\Psi(N_1', N_2', \cdots\cdots)$ と表わされ、これはもとより確率振幅としての意味をもつものである。Ψ は、それぞれが 0, 1, 2, ……と走る無限個の“変数” $N_1', N_2', \cdots\cdots$ の関数であり、つまり汎関数となる。そしてもとの配位空間における対称的な波動関数の空間による表現と、この $\Psi(N_1', N_2', \cdots\cdots)$ の空間による表現（‘占有数表示’）とは、変換理論によって相互に移行しうるものであり、同等であることが示される。結局、こうして相互作用のない量子力学的ボース粒子の集団が現実空間での量子化されたシュレーディンガー場としてとらえうることになる。

なお、このような第二量子化の手続きによって波動場の量子論がまずハイゼンベルク描像で得られたわけであるが、これをシュレーディンガー描像へもどすことは容易である[(3)]。それは、

$$[\phi(x), \phi^*(x')] = \delta(x-x') \tag{13-6'}$$

をみたす $\phi(x)$ 場を用いて、

$$\overline{H} = \int \phi^*(x) H(x, \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}) \phi(x) dx$$

をハミルトニアンとし、状態ベクトル $\Phi(N_1', N_2', \cdots\cdots, t)$ がいまや

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \overline{H}\Phi$$

で変化するシュレーディンガー理論にほかならない。

ディラックは彼の方法を光量子の集団としての輻射場の場合に応用し

---

(3) 以下もとの1体のシュレーディンガー関数 ψ と区別するために、量子化されたq-数の波動場を本章では ϕ と書くことにする。なお（13-6′）はもっとはっきり書くと $[\phi(\vec{x}), \phi^\dagger(\vec{x}')] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$ であるが、われわれは（13-6′）のような書き方ですませることにする。

て、原子による光の放出・吸収・散乱などをあつかった。[4] この場合、(13-1) の q は、(13-5) に出てくる振幅 a と (13-7) すなわち

$$q=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a+a^*)$$

の関係にある。

とにかく、このディラックの輻射論は、原子による光量子の放出・吸収を純粋に量子力学的に記述した最初の理論であって、これにより、ついに電子と光の相互作用の問題がボーア流の対応原理への依存からすっかり解放され、すべてが量子力学の枠内であつかえるようになった。この理論はまた、光の粒子－波動の二重性のディレンマを解決するための形式的基礎をも与え、プランクからアインシュタイン、ボーア、ハイゼンベルクに至る問題にようやく結着をもたらした。同時に、それは「量子電磁気学」のはじまりを意味するものである。

上記の"第二量子化"は本質的に重要な方法的意味をもっているのであるが、これを正しくとらえるために説明を補っておこう。これは1体の確率振幅 $\psi(x,t)$ に対するシュレーディンガー方程式（シュレーディンガー描像）とまったく同形の方程式が、相互作用のない不定個のボース粒子の集団を表わす波動場 $\boldsymbol{\psi}(x,t)$ の運動方程式（これはハイゼンベルク描像）の意味で成り立つということである。[5] 1体のシュレーディンガー方程式においては、$\psi(x,t)$ の引数 x は、変換理論の立場からして

(4) じつは光量子の場合は、これを配位空間で表現するためには運動量配位空間をとらねばならない。また1個の光量子に対するシュレーディンガー方程式に相当するものもマックスウェル方程式と同形でない。そのためディラックの第二量子化の手続きはそのままでは光量子には適用できないのだが、そこで得られた形式は使える。

(5) 波動場 $\boldsymbol{\psi}$ の運動方程式が1体のシュレーディンガー方程式と同形であるということは驚くべきことであるが、また当然でもある。シュレーディンガーの1体の $\psi(x,t)$ は波動場の演算子 $\boldsymbol{\psi}(x,t)$ を真空と1粒子状態ではさんだ行列要素にほかならないからである。

粒子の位置を表わす演算子の（連続）固有値を意味し、物理的解釈の面で t とは異質であるのに対し、波動場 $\psi(x,t)$ のなかの x は空間座標であり、t と対等な ψ のラベルにすぎない。[(6)] a_r、$a_r{}^*$ の意味は、r-状態の粒子を1個へらし、またはふやす、という機能をもつ演算子ということである。そのことは

$$[a_r, N_r]=a_r, \quad [a_r{}^*, N_r]=-a_r{}^*$$

なる関係からわかる。[(7)] 同様に ψ、ψ^* は、端的にいって時空の各点ごとに粒子を消したり創ったりする機能をもつ演算子の場である。

さて、いったん第二量子化によって波動場の理論にまでもってくると、最初の (13-3) におけるNを固定する必要はない。事実、N は (0, 1, 2, ……) なるスペクトルをもつ物理量になっている。元来、場は自由度無限大の力学系であるが、そのことは場というものの状態には任意個数の同種粒子系の状態が全部含まれるということに対応している。場という力学系の状態空間は巨大なものとなる。すなわち粒子が一つもない状態（“真空”）も、この場という力学系にとっては立派な一つの可能な物理的状態（基底状態）であり（したがって、それを表わす状態ベクトルはゼロ・ベクトルではない)、さらに、もともとの出発点となった1粒子状態、また2個の粒子がそれぞれ勝手に走っているような2粒子状態、……が全部励起状態として入り、したがって、またそれらを任意に重ね合わせたような状態——すなわち粒子数の固有状態でないような状態——もすべて、この一つの同じ場という力学系の可能な状態として考えねばならない。[(8)] Nを固定する必要がないだけでなく、つねにNの固有状

---

(6) このため波動場の量子論は理論の相対論化に適している（次章をみよ）。

(7) ディラックはまた

$$a_r=e^{iw_r}\sqrt{N_r}, \quad a_r{}^*=\sqrt{N_r}\,e^{-iw_r}$$

とおく。すると‘振幅’ N_r と位相 w_r は古典論のレベルでは正準共役であり、量子力学的には‘ほとんど’そうであって、N_r は位相をずらす‘運動量’の役割をし、逆に w_r は‘占有数’ N_r をずらす演算子を意味する。

態で考える必要もないのである。[(9)] そしてNと交換しないような相互作用ハミルトニアンを導入することによって、粒子数が変化するような過程をあつかう道がひらかれる。(ディラックの輻射論では実際そういう相互作用が導入され、これによって光量子の生成・消滅があつかわれた。) こうして場の理論に入るということは、量子力学の適用の対象をいっきょに飛躍的に拡大することを意味する。

"第二量子化"の手続きは、量子力学的1体問題から量子力学的多体系への移行に対応するが、他方、もとの理論を古典的なシュレーディンガーの物質場を記述するものと解釈するならば、この手続きはこの古典的な波動場を普通の意味で量子化することによって、これに粒子性を付与することであるとみることもできる[(10)] (いずれの見方をしても最後の結果は同じである)。この場合、量子化された場の強度はいくらでも大きくなりえて、古典的極限が存在し、それがもとの古典物質場の理論にほかならない。この事情を次の図式で表わしておく。

---

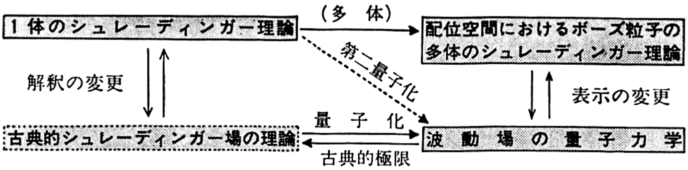
(8) 実際、フォック (1932) は、粒子が一つもない状態としての'真空'から出発して、それに (13-6′) の交換関係をみたす場を順次作用して得られるベクトルをベースとするヒルベルト空間を構成し、そこでの場の量の表現を与えた。それでこの'真空'とこのヒルベルト空間を、'フォック真空'および'フォック空間'とよぶ。

(9) 第二量子化は、粒子の個数Nというものを物理量としてとらえ、$N'=0, 1, 2, \cdots\cdots$なる固有値をもつような演算子で表わし、異なるN'をもつNの固有状態を任意に重ねた状態も固有状態と同じ資格で系の可能な量子力学的状態とする見方に移ることを意味していた。それは統計力学におけるカノニカル・アンサンブルの立場からグランド・カノニカル・アンサンブルの立場への移行にアナロガスである。

(10) そのさいにはシュレーディンガー方程式を$\hbar$の出ない形 (8-29) に表わしておく。かつψのかわりに (8-32) の$\tilde{\psi}=\sqrt{\hbar}\psi$を用いることにする。この物質場のエネルギーは (8-33) であり、そしてこの場の正準量子化は

$$[\tilde{\psi}(x,t), \tilde{\psi}^*(x',t)]=\hbar\delta(x-x')$$

であって、これを通じてはじめて$\hbar$が登場すると同時に、粒子性もはじめて現われてくる (朝永『量子力学』II参照)。



“第二量子化”という言葉は誤解をまねきやすいものであるが、これによって量子力学がもとの1体の量子力学ときまった関連をもつ新しい段階のもの——無限自由度の量子力学——へ上昇することを象徴的に表わしたものとして適当でもある。量子力学において概念・法則・フォーマリズムにヒエラルキーがあることを前にのべたが、“第二量子化”はそのティピカルなものである。しかも、そこで概念が二重にたたみこまれて出てくるということは、そのきわだった特徴であって、“波動関数”はこれによって状態ベクトルと場の演算子とに分化するのである。

さて、これまでのべてきたような第二量子化の方法が、粒子間に相互作用のある場合へ、またフェルミ統計に従う粒子の場合へ拡張できるような一般的な性格のものであることは、ヨルダンらによって明らかにされた。

すなわちヨルダン－クライン（1927年10月）は、ボース粒子の集団を波動場で表わすディラックの方法は粒子間に相互作用がある場合へと拡張できることを示した。ただし、この場合ψ場に対する運動方程式は、もはやもとの1体のシュレーディンガー方程式と同形ではなくて、非線型の項を含むことになる。確率振幅に対する方程式はつねに線型であり、重畳の原理が成り立つが、いまやそれと波動場の方程式との差異が形式上にもはっきりあらわれてくるわけである。

ヨルダン（1927年7月）は他方、ディラックの交換関係（13-5)、(13-6）を反交換関係[11]

$$\{a_r, a_s^*\}=\delta_{rs}, \quad \{a_r, a_s\}=0, \tag{13-8a}$$

$$\{\psi(x), \psi^*(x')\}=\delta(x-x') \tag{13-8b}$$

で置き換えるならば、各占有数 $N_r = a_r{}^* a_r$ の固有値は 0 と 1 のみになり、ちょうど排他律に符合することに気づいた。(12) 量子力学において排他律は波動関数が導入されてはじめてその反対称性として表現されえたことを前にのべたが、いまやそれが量子化された場の演算子の反交換関係として代数的に表現されることになったわけである。これは重大な発見であって，実際反交換関係（13-8a）は排他律の最も直截な表現を意味している。

そこでこれにもとづきヨルダン－ウィグナー（1928年1月）は、電子のように排他律に従い反対称な配位空間波動関数で記述される粒子の集団は、1体のシュレーディンガー方程式に前の（13-6）のかわりに（13-8）なる反交換関係による新しい“量子化”をほどこして得られる波動場と同等であることを証明した。これは、光量子のようなボース系と、電子のようなフェルミ系とのアナロジーを、新しいレベルで再現するものである。ただし、いまの場合は、場の強度は任意に強くなるわけにはゆかず、この場が古典場としてふるまうような極限は存在しない。それゆえ、いまの場合は、先の図式において破線でかこってある〔古典的シュレーディンガー場の理論〕の部分は ficticious なものとなる。また反交換関係であるため、$\psi(x, t)$ 自身ではなくて、カレントのような、これからつくられる双1次の量のみが観測可能な物理量をあらわす。こういう事情のために、ボース粒子系の場合とちがい、電子のような場

---

(11) ここに $\{A, B\}$ は前にものべたように A, B の反交換子（すなわち‘対称積’）を意味し $[A, B]_+$ とも書く：$\{A, B\} = [A, B]_+ = AB + BA$。

(12) もし添字 r の自由度を一つに固定して考えると、(13-8) は

$$aa^* + a^*a = 1, \quad a^2 = 0$$

となるが、これはエルミートなパウリーマトリックス $\{\sigma_i\}$ の代数と同等である。実際 a、a^* は

$$a = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a^* = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように2行2列のマトリックスで表わされる。なお $\sigma_3 = 1 - 2a^*a$。

合の「第二量子化」の方法は人為的な技巧にすぎないとする見方をとる人が当初多かった（ディラックやパウリらを含めて）。しかし、それがやはり不可避的な意義をもつことが、以後の発展とともに次第に認められるようになる（第14章参照）。

こうして、とにかく量子力学的な不定個の同種粒子の集団と、マイナスまたはプラスの交換関係によって量子化された現実空間の波動場とは、少なくとも非相対論的な量子力学において同じものになり、粒子系と波動場の同一性がこのような段階で達せられることになったのである。同種粒子は不可識別でボースあるいはフェルミ統計性をもつということのために、量子力学的粒子はじつは場の量子とみなしうるものであり、粒子数は場のいろんなモードの占有数を意味する一つの物理量となり、粒子は生滅しうるものとなる。こうして粒子——とくに素粒子——の概念が量子論の最初のプランク流の（またアインシュタインないしデバイ流の）量子の概念にまたたちかえってくることになる。量子力学的粒子は単に位置－運動量の不確定性原理をみたすものであるというだけにとどまらず、その同種粒子が相互に不可識別であり、場の量子という性質をもつようなものなのである。

しかも同種粒子の統計性（ボースあるいはフェルミ）は、シュレーディンガーの配位空間の理論では波動関数に対する完全対称あるいは完全反対称という拘束であったのに対し、第二量子化の形式では粒子を場の量子と見直すところの量子化を規定する交換関係（13–6）あるいは（13–8）、すなわち

$$[\psi(x), \psi^*(x')]_\pm = \delta(x-x')$$

自体のなかに符号（signature）の二者択一として吸収されるという意味で、より自然にビルトインされているといえる。

波動場の量子力学は波動力学と行列力学との新たな段階での統一ともみなされる。それは多体問題のあつかいに新しい有力な方法を提供するものであり、また相対論的量子力学へ進むための一つの好都合な出発点を提供する。

第14章　量子力学と相対論との結合

§14·1　相対論化の問題

不確定性原理にもとづく統計的解釈、ディラックの輻射論、「第二量子化」による粒子系と波動場の統一、およびノイマンによる理論の数学的厳密化をもって、量子力学は1927年末ころには本質的に完成の域に達したとみなされる。そしてこの進展に並行して、またそれにひきつづいて、いまや量子力学をさまざまの問題に適用し、種々の近似法を開発しながらそれを解いていき、実験事実を説明し、あるいは予言する仕事が堰をきったように進行する。

たとえば化学結合、強磁性、金属の凝集力や電気伝導等々長らくデッドロックの状態にあった問題が、量子力学にもとづいてぞくぞくと解明されていった。放射性原子核の放射能も従来謎であったが、α崩壊はいまや波動力学的トンネル効果によって理解され、α崩壊の寿命と出てくるα粒子のエネルギーとの間にみられるガイガー－ヌッタルの規則を説明することができた。しかし超電導のようになお長らく解明されずにとり残された問題[(1)]もある。また放射能のうちβ崩壊は当分はいぜん謎につつまれていた。概して原子核の問題が量子力学によって一般的に解明されるという見通しがたつようになったのは、1932年の中性子の発見以後となる。これらのいろんな具体的な問題における進展はまことに目ざましいものであるが、われわれはそれにはほとんど立ち入らないことにする。

---

(1)　ずっとあとになって、これも量子力学的基礎で解明されることになる（BCS 理論、1957）。

量子力学自体は1927年末ころに完成の域に達したとはいえ、なお残っている一般的・原理的な問題としては、量子力学にもとづいた統計力学の定式化、相対論的な量子力学の建設、観測の理論や量子力学の公理論的研究などがある。このうち最初のものは比較的スムースにいくであろうということは、そもそも量子の観念が統計力学の問題と密接に関連して導入されたという歴史的いきさつからしても予想されることである。それは実際、すでにのべた同種粒子の統計に対するディラックの仕事についでパウリの"マスター方程式"の摂動論的導出（1928）、ワイルのGemisch（混合状態）の観念、とくにノイマンによる"密度行列"の導入（1927、1932）[(2)] などを出発点として進行した。ギッブスの統計力学の体系ははじめから量子力学にもよく適合するようにできていたことがわかるのであるが、このことは密度行列を用いて形式的にもととのえられる。温度Tで熱平衡にあるときのカノニカル分布は、この密度行列ρが

$$\rho=\frac{e^{-H/kT}}{Z}, \qquad Z=\mathrm{tr}(e^{-H/kT})$$

なるようなものであり、Zは分配関数（状態和）である（上でHはハミルトニアン演算子）。このノイマンの仕事により、また物性論の実際問題と関連しつつ「量子統計力学」は基礎が固められていくことになる。

一方、量子力学を特殊相対論に調和させるという問題は、原理的にも実際上にも重要であるだけでなく、本質的に新しい課題を意味している。実験が次第に高エネルギーの領域に、したがってまた極微の領域に——つまり素粒子論的領域に——進展していくにつれて、それに対処するうえで量子力学とともに特殊相対論の原理が要請されねばならず、つまり相対論的な量子力学が必要となる。すでに確立された量子力学の一般原理・法則は特殊相対論の原理と同様、もはやそれ自体として修正を要するようなものではないと考えられるので[(3)]、問題は両者を結合した理論をつくることである。そして量子力学の原理も相対論の原理も自然法則として正しいものと信ぜられる以上、両者は当然矛盾なく結合しうるはず

---

(2) これはランダウ L. Landau やディラックによってもなされた。

だと予想されようが、問題はしかく簡単ではないのである。とにかく、この結合ということは非常に大きな課題を意味し、事実それがその後何十年にもわたって理論の発展の重要なライトモチーフとなる。そしてそこから幾多の新しい概念が生まれ、新しい構造と連関が見出されると同時に、新しい困難・矛盾がうみ出され、こうして素粒子論を中心とする理論の新しい局面に入ることになる。これにくわしく立ち入ることは本書の目的ではないが、この最後の章で量子力学の相対論化がどのように開始されたかをのべ、その初期の展開を概観しておきたい。のちの発展については少しくふれるにとどめる。

これまでに量子力学の一般法則はとらえられたが、それはすべて非相対論的なモデルによってであった。この非相対論的な量子力学は閉じたコンシステントな体系を構成するけれども、相対論の見地からすれば粒子間の相対速度が光速に比して小さいときに妥当するような近似的な性格の理論といわねばならない。したがって量子力学の相対論化の要求は当初から内在していた。そもそも量子力学の出発点となったドブロイの関係は相対論的なものだったのである。

相対論化が実際に必要なことは、これまでの量子力学では、たとえば水素の原子スペクトルの微細構造の説明がなお不完全なことにみられる。またノイマン－ウィグナーらの原子スペクトルの理論にしてもスピン－軌道結合のような相対論的効果をとりいれてはいるが、これは非相対論的近似とみねばならない。要するに、量子力学発見の地盤となった原子と原子スペクトルの理論自身（スペクトル線の強度や幅の問題を別としても）、まだ完全に精密なものとはいえないのである。また輻射の理論は元来つねに相対論的にあつかうべきものであるが、それについての前述のディラックの輻射論はローレンツ不変性に関して問題を残している。

---

(3) 当時、人々がみなそう考えたというのではない。また将来いつまでもこういう立場で貫徹できるかどうかはわからない。しかし現在までのところ、いろいろ曲折を経つつも、理論はほぼこの線で進んできていることは事実である。

この理論は、また電子についてはこれを非相対論的にあつかっている点でシュレーディンガー理論と同様であるが、電子の運動エネルギーが静止エネルギー mc^2 に比して小さくないような現象では電子も相対論的にあつかう必要がある。コンプトン効果はその一例である。総じて高エネルギー現象に関する実験が問題になってくるにつれて、相対論は本質的となる。つまり相対論的効果を (v/c) のベキの逐次近似で順次とり入れていくという'半相対論的'なやり方ではなくて、はじめから完全に相対論的な理論をつくることが要請されるのである。

とにかく量子力学ができるや、これを特殊相対論と調和させるという課題が前面におし出され、人々が直ちにいろんな面からそれに取り組んだことは当然であった。この試みにおいて最初の成功はまたしてもディラックによるものであり、次にのべる彼の電子の「ディラック方程式」の発見は相対論的量子力学の時代を開幕することになる。

§14・2　ディラック方程式

量子力学の相対論化を試みるのに、再びシュレーディンガー描像で出発するのとハイゼンベルク描像で出発するのとの二つのゆき方があるはずだが、一般的にいえば後者のほうが適しているであろう。なぜなら、そこでは状態ベクトルが時間によらないので、物理量について運動方程式と量子化をローレンツ不変な内容をもつように与えさえすればよいからである。最も簡単な自由な1粒子問題の場合について考えると、その相対論的な古典力学は

$$H=c\sqrt{(\vec{p})^2+m^2c^2} \tag{14-1}$$

なるハミルトニアンから正準方程式として得られるから、そこで正準交換関係

$$[x_i(t), p_j(t)]=i\hbar\delta_{ij} \tag{14-2}$$

をおいて、x、p、Hなどを q-数に昇格させればよいと考えられる。しかし (14-1) が根号を含んでいるため、出てくる波動方程式は非局所的

となり、相対論的因果性を破るという難点をもつ。また (14-2) がローレンツ共変な関係でないという欠点がある。この場合、x_i は q-数であるのに対し、t は c-数のパラメターにすぎず、時間が特別な役割をしている。(4)

そこで、むしろシュレーディンガー描像で考え、シュレーディンガー表示における1体の波動関数 $\psi(x,t)$ に対するシュレーディンガー方程式 (8-26) から出発し、これを (x,t) のローレンツ変換

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu, \nu = 1,2,3,4 ; x_4 = ix_0 = ict) \qquad (14\text{-}3)$$

に対して共変な波動方程式に改めることを求めるというゆき方が考えられる。じつはそういう方程式として1926年以来相対論的なスカラー波動方程式、いわゆるクライン-ゴルドン方程式 (7-21) が知られている。しかしこの方程式自身は、そのままでは波動関数の確率的解釈に適合せず、スピンも入っていず、これを電子に用いても格別実験と合う結果をもたらさない、などの難点をもっている。シュレーディンガーにしろ、クラインやパウリにしろ相対論のヴェテランであり、もっと満足な相対論的波動方程式をさがすことにかかっていたはずである。(5) ことにパウリ

---

(4) 共変的な量子化として次のようなやり方が考えられる。まず1個の粒子の相対論的運動は任意のパラメター τ を用いて $x_\mu(\tau)$ なる世界線で記述され、運動方程式は

$$A = -m \int \sqrt{-\left(\frac{dx_\mu}{d\tau}\right)^2}\, d\tau$$

なる作用積分から $\delta A=0$ なる変分原理によって導かれ、そのさい x_μ に共役な運動量 p_μ は $p_\mu{}^2 + m^2c^2 = 0$ なる拘束をみたすことになる。それゆえこの古典論は

$$[x_\mu(\tau), p_\nu(\tau)] = i\hbar g_{\mu\nu} \qquad (\text{ここでは } \mu, \nu = 1,2,3,0)$$

なる共変的な交換関係と

$$(p_\mu{}^2 + m^2c^2)\psi = 0$$

なる付加条件をおくことによって量子化されると考えられるが、この結果はクライン-ゴルドン方程式にほかならない。

はスピンを入れた彼の2成分波動方程式を書いたさい、それがローレンツ変換に不変でなくて、非相対論的近似理論にすぎないことを強く意識している。

ところがディラックは、変換理論の見地からして、1体問題の範囲で確率的解釈を許すような相対論的波動方程式をさがすという立場に立った。そういう方程式は時間について1階なシュレーディンガーの形

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}-H\psi=0$$

に書かれねばならぬが、ローレンツ共変性のためには三つの空間座標についても1階微分の方程式であるべきである。そこで彼は、クライン-ゴルドン方程式を

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}=2\delta_{\mu\nu} \tag{14-4}$$

なる反交換関係をみたす4個の4行4列のマトリックス γ_μ のたすけで"因数分解"するというはなれ業によって、新しい方程式を見出した(1928年1月)。この"ディラック方程式"は自由粒子の場合

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x,t)=0 \tag{14-5}$$

である。ψ はいまや4成分となるが[(6)]、各成分 ψ_ρ は(14-4)のため(14-5)の結果として(自由粒子の場合には)クライン-ゴルドン方程式をみたすわけである。このことは、きまった静止質量 m をもつ相対論的粒子に対する基本的関係

---

(5) 実際ディラック方程式が提出されたとき、直ちにこれに反応したのは彼らであり、さらにダーウィン、ゴルドン、フォックらであった。

(6) 行列力学の発見以後、人々は行列になれてきたが、ディラックの γ-マトリックスは行列の新しい使用の仕方を意味しており、それは ψ_ρ $(\rho=1,2,3,4)$ に対する連立方程式をコンパクトに書くための方便のようにもみなされるが、じつは物理的にも重要な意味をもってくる。またディラックの(14-4)はパウリ-マトリックスに対する $\{\sigma_i, \sigma_j\}=2\delta_{ij}$ の拡大であるが、γ_μ からは15個のマトリックス(γ_μ, $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, γ_5 などを含む)がつくられ、それは単なるスピンの相対論化以上のものを含んでいる。

$$E^2-(\vec{p})^2c^2=m^2c^4$$

と、$(\vec{p}, E)$ と $(\vec{k}, \omega)$ の間のドブロイの関係を維持するために必要なことなのである。

外から電磁場が働いている場合には、前にのべた“極小電磁相互作用”の処方に従い、自由な場合の (14–5) 式で単に

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu}-\frac{ie}{\hbar c}A_\mu \tag{14–6}$$

なる置き換えをする（A_μ は電磁場のポテンシャル）。

ディラックがその方程式を発見したやり方は、当時としてはまったく新しいスタイルのものであった。それは量子力学の波動方程式を見出すスタンダードのゆき方となったもの、つまりなんらかの古典的モデルから出発し、対応原理にもとづいて正準量子化をほどこした結果をシュレーディンガー描像で表わすというやり方[(7)]ではないのである。

彼は他の人々のように、パウリ方程式をいろいろいじってそれを相対論化しようと試みるのではなくして[(8)]、新しい見地から出発した。そしてディラックの波動関数はパウリの 2 成分波動関数をもう一度倍増したものとみなせるにしても、パウリのゴタゴタした 2 成分方程式に比してこの 4 成分のディラック方程式ははるかにスマートである。ローレンツ変換に対して ψ_ρ は、時空の 1 点で考えれば回転のさいにはユニタリーな、また“ブースト”（特殊ローレンツ変換）のさいには非ユニタリーな変換をする 4 成分のスピノールであるが[(9)]、そのことが粒子が$\frac{1}{2}$の固有角運動量すなわちスピンをもつことを意味している。このような ψ からつ

---

(7) シュレーディンガー自身、こういう手順でシュレーディンガー方程式を発見したわけではないが。

(8) もちろん、あとから考えればそういうやり方でディラック方程式に達することも可能である。ことに $m=0$ のときはそうであって、このときはワイルの相対論的 2 成分方程式に達する（ワイル、1929)。

(9) ローレンツ群は非コンパクトなため、その有限次元表現は非ユニタリーであり、これがディラック方程式がパウリ方程式と異なる特徴の一つである。

くられる

$$\bar{\psi}^{(1)}\gamma_\mu\psi^{(2)} \qquad (\text{ここに } \bar{\psi}=\psi^*\gamma_4) \tag{14-7}$$

は4元ベクトルである。[10] しかも $\psi^{(1)}$、$\psi^{(2)}$ がそれぞれディラック方程式をみたすならば、(14-7) は連続の式をみたすので $\int\psi^{(1)*}\psi^{(2)}d^3x$ は保存し、ローレンツ変換のスカラー量であることになり（したがってブーストにも不変であり)、それでこれを二つの状態ベクトル $\psi^{(1)}$、$\psi^{(2)}$ の内積 $(\psi^{(1)},\psi^{(2)})$ を表わすものと定義するならば、ローレンツ変換に対して ψ の変換はユニタリーとなり、ローレンツ変換に対する内積（"遷移確率"）の保存が保証される。とくに $\int\psi^*\psi d^3x$ はノルムを表わし、$\psi^*\psi=\sum_\rho\psi_\rho^*(x)\psi_\rho(x)$ を確率密度とみなす解釈が適合することになる。

彼が変換理論とローレンツ共変性からして波動方程式は時間についても空間座標についても1階微分であるべしとしたそのそもそもの出発点の着想は、簡単だがちょっと人の意表をついている。いったい空間座標について1階の方程式が空間回転や反転に不変でありうるということについては、マックスウェル方程式（電場$\vec{E}$、磁場$\vec{H}$を用いた）の例があったことは事実である。しかし波動力学の相対論化を探求するのに他の人々が従来の常識にとらわれてなにかテンソル算法にもとづいて模索したのに対し、ディラックは変換理論を含む量子力学の一般原理のほうに固執することによっておのずからスピノールという新しい道具を見出すことになったのである。

さて (14-6) によって規定される電磁場における粒子のふるまいからして、粒子が2のg-因子と$\frac{1}{2}$のトーマス因子をもつことが自働的に出てくる。[11] そしてこのディラック方程式によって水素原子の問題を解いて

---

(10) (14-7) は、ディラックの ψ はそれによって4元ベクトルを'因数分解'せしめるようなローレンツ変換の共変量であることを示している。このような ψ は狭義ローレンツ変換に局所同型な SL(2C) 変換の基礎表現と、その共役表現のベースの対からなるとみることができる。これはファン・デル・ウェルデン van der Waerden の'スピノール解析' (1929) で示される。

みると、エネルギー準位として古いゾンマーフェルトの微細構造の公式と同じ式を得る（このことはダーウィンやゴルドンにより示された）。

こうしてディラック方程式は、電子の固有の性質すなわちスピンと、それに伴う諸性質を、なんらかの内部構造のモデルからではなくして、量子力学と相対論の一般原理の結合の直接の結果として一挙に演繹した本質論とみなされ、まさにこの意味で、それは「素粒子論」の出発点となった。

ところでディラック方程式の著しい点は、それが負エネルギー（負質量）状態をともなうという不都合な性質をもっていることである。じつはこれは相対論における粒子のエネルギーと運動量の間の基本的な関係 $E^2-c^2(\vec{p})^2=m^2c^4$ に根ざすことなのであり、それがいま量子力学において困難として表面化してきたにすぎない。実際そのため、たとえば外力が働いているとき正エネルギー状態の電子は有限の確率で負エネルギー状態へ遷移するという困難を生じる（クラインの指摘したパラドックス）。また自由なディラック粒子の波束のふるまいにおいて、それが正エネルギーの部分と負エネルギーの部分を含んでいるとき、両者の干渉の結果として 'Zitterbewegung' とよぶ振動的な部分を生じる（これはシュレーディンガーが指摘した）。

前にのべたディラックの輻射論は、電子を非相対論的にあつかっていたわけであるが、いまやそこで電子の運動とその輻射場とのカップリングをディラック方程式に改めることにより、この輻射論も相対論的なものになる。ゆえに、それによってコンプトン散乱の微分断面積を計算するならば、理論の検証に役立つはずである。この計算はすでに相当複雑であるが、コペンハーゲンにおいてクラインと仁科によって実行され、実験とよく合う結果を得た（1928年8月）(12)。

ここで次の点を注意しておこう。ディラック方程式がローレンツ変換に対して共変であることを示すさいに、ローレンツ変換に対し $\psi(x,t)$

(11) 電磁場におけるディラック方程式に対する非相対論的近似として、実際、前のパウリの2成分方程式が導かれる。

の引数 x、t が (14-3) で変換するとみている。すなわち (x,t) を4元座標としてあつかい、x と t をまぜている。ディラックはその方程式を見出すさいに、変換理論の立場にたって ψ を1個の電子の状態ベクトルの x-表示という見方をとったが、それに固執すると $\psi(x,t)$ における x は演算子 x の固有値を意味し、純粋のc-数である t と元来対等でない。しかしそもそも (14-3) の変換を考えるということは、$\psi(x,t)$ の引数 x,t をすべて単なるc-数（時空点を表わすレッテル）とみる見方、すなわち ψ を（古典）波動場とする見方に暗黙のうちに近づいていることになる。

もう一つは次の点である。じつは彼が1体の量子力学と変換理論の立場に固執することによってその方程式を見出した論法は、あとから見ればば必ずしもまったく正当なものだとはいえないということになるが、それでも新しい理論を見出した彼のこのさいの方法は、はなはだ教訓的であるということである（次節参照)。

§14・3　波動場の量子論と空孔理論

1体問題はディラック方程式のようなものでよいとして、それを多体問題に拡張することは非相対論的なシュレーディンガー理論の場合のように簡単にやるわけにはいかない。それは、相対論では2粒子間の力のポテンシャルというような概念をいきなり使うことは単純にはできないからである[(13)]。また古典論において、相互作用のある相対論的多粒子問題は普通の正準形式に書くことがむつかしく、粒子像から出発する限り普通の量子化の方法をそこに適用しがたいようにみえる。そこで相対論的

---

(12)　従来、電子にクライン－ゴルドン方程式を用いたりしてコンプトン散乱の計算は行なわれていたが、結果は実験とよく合わなかった。クライン－仁科の式が出て以後、コンプトン散乱についてそれ以前になされた多くの計算は忘れ去られることになった。なおクライン－仁科は、電子にディラック方程式を用いつつも、じつはクラインの‘対応論的輻射論’のやり方でそれを計算したのである。この対応論的輻射論は量子力学的な場の理論にもとづく量子電磁気学ができるまでの間つなぎの役をしただけでなく、その後も実用された。

多電子系を粒子的描像から出発して量子化するには、普通の正準量子化ではない、なにか別のやり方を工夫せねばならない[14]。そういう方法の一つとしては、あとでディラックの「多時間理論」にふれる。

しかし、前章にのべた「第二量子化」の理論は、波動場の量子化のやり方で進むならば、この相対論的多体系と相互作用の問題にもっと容易に接近できるだろうということを示唆している。前章の第二量子化の理論自体は非相対論だったが、このような波動場の理論が相対論と調和させやすいことは、そこで予想したところである[15]。この第二量子化の理論によれば、1粒子問題の波動方程式とみられるものを波動場という新しい系の運動方程式のようにみなして、それを正準交換関係（または反交換関係）によって量子化し、ハイゼンベルク描像における量子化された場の方程式に格上げするならば、それはもとの粒子の多体系の量子力学を与える。それゆえ出発点になるc－数波動方程式としてシュレーディンガー方程式のかわりに相対論的なものをとっておくならば、「第二量子化」の手続きによって得られる理論は、相対論的粒子の多体系の量子力学をあらわしているであろうと期待される。

この場合、量子化はその波動方程式を導くラグランジアンから出発して、正準量子化の方法に従って波動場の振幅ϕとその正準共役なΠとの間に同時刻交換関係をおくことによって、場の量を時空の各点で定義された演算子に格上げすることを意味している。そのような交換関係は

---

(13) 古典論においても相互作用を相対論的不変性と相対論的因果性（作用の伝播速度の有限性）に合うようにとりいれるには、場を用い、近接作用で考え、局所的相互作用に煮詰めておくのが普通のやり方であった。そもそもマックスウェル－ローレンツの電磁気学が――遠隔作用の電磁気学とちがって――そういう性格のものだったのである。

(14) じつは、1体のディラック方程式自身が、そもそも古典論の正準量子化によって得られたものでないことは先に注意した。

(15) 本節では、理論の相対論化の要求から場の量子論への移行と発展が動機づけられたことをのべるが、場の量子論の方法自体は固体論などの非相対論的な多体問題にも有用であり、のちにその方面でも盛んに使われるようになる。

$$[\phi(x,t),\Pi(x',t)]=i\hbar\delta(x-x') \tag{14-8}$$

なるタイプのものとなり（これは前の（13-6）式と同じものである[16]）、右辺に――質点系の場合のクロネッカーの δ_{rs} のかわりに――特異的（singular）なディラックの δ- 関数があらわれる点がいちじるしい特徴であって、それは無限自由度なことによる。この（14-8）は同時刻ということのために非共変な関係ではあるが、それが波動方程式（それは、いまや演算子の場に対するものであって、ハイゼンベルク描像での運動方程式を意味するが、ローレンツ共変であることにかわりはない）とコンシステントである限り、この量子化は理論のローレンツ不変性をそこなうものではないと考えられる。かつ（14-8）の交換関係は「ミクロ因果性」の要請、つまり"空間的に"へだたっている任意の二つの時空点 (x,t) と (x',t') 〔$(\vec{x}-\vec{x'})^2-c^2(t-t')^2>0$〕について

$$[\phi(x,t),\phi^*(x',t')]=0 \tag{14-9}$$

という要請、をみたすことが一般的にわかる。これは（14-8）の右辺が δ- 関数であることによっている。（14-9）はある 1 点での場の観測の影響が超光速で他の点に伝わらないということを意味しており、たしかに相対論的因果性を表わしている。

とにかく、こうして得られる理論は、少なくとも自由場の場合には、出発点となった c-数波動方程式が記述していたような質量とスピンをもつ粒子が不定個の同種粒子として存在する集団を記述しているはずである。さらに古典論において相互作用を相対論的な不変性に合致して考えるために近接作用の立場をとり局所的カップリングを入れたのと同様に、いまの場合も相互作用はやはり場の間の局所的なカップリングとして導入されるべきである。この場合、場は時空の各点ごとに粒子を創っ

（16） ϕ は一般には成分をもっており、またある場合には（14-8）の左辺の交換子を反交換子でおきかえねばならないが、いまそういう事情は無視して書いている。同様の注意は（14-9）にもあてはまる。

たり消したりする演算子の場を意味するので、このカップリングにより粒子の生滅・転化が実際にまた仮想的に（中間的に）おきることになり、これはちょうど素粒子の生滅・転化の事実にマッチするだけでなく、粒子間に力を伝播することなども期待されるのである。

上にのべたような期待は、実際、正当化されることが具体的に示される。第一にラグランジアンから出発し、正準形式に書けるような場の理論においては、空間に連続的に拡がる場という無限大の自由度をもつ力学系の量子化を、普通の粒子系の量子力学の場合の手続きにならって、すなわち正準量子化としてやることが可能である。この量子化の手続きはローレンツ変換に対して共変ではないけれども、ラグランジアン密度が場の量とその1階微分とのローレンツ不変な関数であるならば、一般にこの量子化は理論のローレンツ不変性をそこなわないのである。そのことは相互作用があっても妥当する（その場合、理論がいたく非共変な形になることはやむをえない）。ハイゼンベルクとパウリは、彼らの長大な共同論文においてこのことを腕づくで示した（1929年3月）。

第二に、これまでに知られている相対論的な波動方程式——マックスウェル、ディラック、クライン-ゴルドンの諸方程式——は、量子力学の1体問題確率振幅の方程式としてはそれぞれなんらかの欠点をもっているのだが（負確率、負エネルギーなど）、上述の第二量子化されるべきc-数波動方程式としてこれらを順番にとり上げ、それを上述のような手続きで量子化（ある場合には反交換関係による量子化）して得られるところの場の量子論をしらべてみると、それはいずれの場合にも、少なくとも自由場の場合には、予想したとおりの同種粒子の不定個の多体系の相対論的量子力学として合理的なものを表わすということがわかるのである[(17)]（このことは段々に経験的にわかってきた）。このことは逆に

(17) このようなうまい結果になるということはいささか僥倖的にみえるが、一つには‘量子化’の手続きにおいて交換関係をおくか反交換関係をおくかという選択が存在すること、かつまた零点エネルギーの引き算が合理的に可能であることなどがきいている。

いって、次のことを含意している。場を量子化するといっても、どんな場でも物理的に意味があるというわけではなくて、量子化の結果として“粒子的解釈”（しかもいまは相対論的な粒子としての解釈）を許すようなものでなければならないと考えられるのだが、そういうような場が「第二量子化」という発見法的な指導原理を通じてあらかじめえらび出されたということである。

さて c−数波動場の量子化としてまずとり上げられたのは、自由なマックスウェル場である。この場合は、もとのマックスウェル理論は古典的領域で実験と合い、電場$\overrightarrow{E}$や磁場$\overrightarrow{H}$は観測可能な量であった。不確定性原理の普遍性からして、これは対応原理をみたすところの普通の正準量子化をほどこさねばならない。実際これまでにマックスウェル場をフーリエ展開してノーマル・モードについて普通の量子化をほどこすことはなされてきたわけであるが、これを時空へ書きうつし、場の量自身に対する交換関係にもどすことができる。自由場の場合、この正準量子化（これは同時刻）と運動方程式とからして、ハイゼンベルク描像において任意の２時空点の場の量の間の交換関係を算出することができる。結果はその交換子が光円錐上に特異性をもったローレンツ不変な“D−関数”に等しいということである。（このことはヨルダンとパウリが示した。1927年12月）。これは自由マックスウェル場の場合について、正準量子化がたしかにローレンツ不変性と相対論的因果性に合致するということをデモンストレートするものである。

ヨルダン－パウリの理論は自由電磁場の理論であるが、電磁場と電子との相互作用を含む理論としては前述のディラックの輻射論がある。この理論は——電子をディラック方程式であつかった形においても——電磁場について横波の部分だけを量子化し、残りは荷電粒子間に同時刻に働く直接の静的なクーロン・ポテンシャルとしてあつかっている。これは非共変な“クーロン・ゲージ”で考えていることを意味するわけであるが、この理論はさらにシュレーディンガー描像で考えているということのゆえにも、理論のローレンツ不変性が明白でない。またこのゲージ

は、摂動の高次の計算を行なうには便利でない。光量子が質量項ゼロのベクトル場の量子に相当し、ゲージ不変性が存在するため、電磁場の真の力学的自由度は横波だけなのであるが、相対論的不変性を明白にするには、やはり縦波とスカラー波も横波と対等に独立な自由度としてあつかい、全部を量子化したうえで、可能な状態ベクトルに制限を加えるという定式化が適している。[18] そうすれば、荷電粒子間の静的なクーロン力自体も量子の交換の結果として理解されることになるはずである。[19]

ハイゼンベルクとパウリは、前述した彼ら自身の波動場の量子化の一般論にもとづいて、上記のヨルダン－パウリの理論、ディラックの輻射論、前章にのべたヨルダン－ウィグナーの電子の第二量子化の理論の三本を総合して、電子と電磁場の相互作用の量子論、すなわち「量子電磁気学」を完全な場の量子論の立場で定式化した（1929年3月と9月）。ただ電磁場に対しては、ゲージ群の存在という特殊事情のために、正準量子化の方法があいにく型通りには使えないという事態に遭遇する。彼らはこの困難を技巧的なやり方できり抜けたが、そのためローレンツ共変性はいっそうそこなわれた。

彼らは、電子のほうも電磁場と対等に場の理論としてあつかうわけであるが、そのためにディラック方程式をヨルダン－ウィグナー流の反交換関係によって量子化するのである。[20] すると、予期されたように、この場は排他律に従う不定個のディラック電子の集まりを記述することがわかる。ディラックのψはいまや量子化されたスピノール場に化け、それのオペレートすべき状態ベクトルがその背後に想定されることになる。彼らの場合、ディラック電子の1粒子状態はまだ依然として負エネルギー状態を含んでいるが、じつはこの反交換関係による量子化の結果、電

---

(18) 対応原理をみたすにはそれで十分なのである。

(19) クーロン力は縦光子とスカラー光子をいっしょに交換することから生じる。

(20) 1個の粒子に対するものとしてのもとのディラック方程式は、前にものべたようにラグランジアンにもとづく正準量子化として導かれるものではなかったが、c－数波動場とみたディラック方程式はラグランジアンから導ける。

流密度の定義の修正によってこの困難は除きうるものだった。このことはあとでのべる。

このハイゼンベルク－パウリの理論で一応「量子電磁気学」ができたといえるが、この理論はいろいろ形式上の欠点をもっている。ことに、それは相対論的ではあるが、ローレンツ共変な形をしていないということがそうである。

同じころフェルミは、量子電磁気学についてハイゼンベルク－パウリとは少しちがったラグランジアンから出発し、電磁ポテンシャル A_μ のゲージを共変的に制限するところの“ローレンツ条件”を許される状態ベクトルを制限するものとしての付加条件としておくという方式によってローレンツ共変性を少しく改善した。彼は、電子に対しては粒子的にあつかう立場をとっており、その理論から出発してもとのディラックの輻射論のハミルトニアンをちょうど再現できることを示した。このことは、‘ローレンツ・ゲージ’における量子論と‘クーロン・ゲージ’における量子論との同等性を直接デモンストレートしたことを意味している。

フェルミの電磁場の量子化の方法もなお欠点をもっている。ことに彼の付加条件はまだ完全にコンシステントなものとはいえないのである。電磁気学はゲージ不変性が存在するため、量子化は拘束のある場合のそれに相当し、普通の量子化の手続きが必ずしもそのまま当てはまらない。そういう事情のために、元来明瞭な古典的対応物をもつはずの量子電磁気学の場合に（ことに電磁場について）、意外にも量子化はもっともデリケートなものとなり、さらにくわしい研究を要することとなる。(21)

ともあれ「量子電磁気学」は1930年ころには一応成立した。光の粒子－波動の二重性は、光子の数と場の強さ（あるいは位相）との間の不確定

---

(21) 完全に共変的な量子電磁気学の形式を達成するためには、ディラックが導入した「不定メトリックの量子力学」(1942) というような量子力学の拡張を形式的に利用することまで必要になってくることがのちにみとめられた（注 (44) 参照)。

関係によって解釈され、また古典的波動理論は光子が密であるような（すなわち波長の3乗の体積あたりの光子の平均数が1よりはるかに多いような）情況で成り立ち、そこで光の伝播や干渉が波動光学の法則に従うことが量子電磁気学の立場から再現される。この理論によって電子と電磁場の相互作用の問題も完全に量子力学的に見直すことができる。古典的にはたとえば2個の荷電粒子間の力は、一方の粒子がその場所の電磁場を変化させ、この変化が電磁場の波として伝播してゆき、これが他方の粒子の場所に達して力を加えることによっておきる。ところが量子力学的にはこのような（電磁場に対する）波動場の描像は粒子の描像と同等となり、この過程は、一方の荷電粒子が光子を仮想的に放出し、この光子が走っていって他方の荷電粒子のところに到達してそこで吸収されることの結果として運動量が交換され力を生じると表現することができることになる。同様の過程は同じ1個の荷電粒子に対してもおこり、「自己エネルギー」とよばれる効果をもたらすわけである。

ところでハイゼンベルク－パウリの理論は、形式的な欠点だけでなく、内容的な困難をも含んでいる。すなわち、この理論は高次の過程について発散積分に導くということが、理論の生まれた当初から著者たち自身にも認められ、またワラー I. Waller やオッペンハイマーらによっても指摘された。量子論のそもそもの起こりであった光と物質の相互作用の問題に決着をつけるために、量子力学は結局ハイゼンベルク－パウリの「局所場の量子論」にまで行きつかざるをえなかった。この理論は、ある意味でそれまでの量子力学の展開を集大成するはずのものであったが、無限大の自由度の系の相互作用の量子力学であるという点で、量子力学の新しい段階を画する。ところが、それは当初から上にふれたように発散の困難を含んでおり、こうして「場の量子論」は苦渋なスタートをきることになったわけである。

一方、前にのべたディラック方程式が負エネルギー状態の解をもつという難点は、理論の発展の重大な契機となった。ハイゼンベルク－パウリらの仕事と同じころ、ディラックはこの負エネルギー状態の困難が排

他律と「真空」の再解釈とによってさけられるという「空孔理論」の着想に達した（1929年12月）。「真空」は負エネルギー状態がちょうど全部つまった状態であり、この負エネルギー電子の海は、その一様性のゆえに観測されず、観測されるのはそれからのずれであると解釈する。すなわち、たまたま占有されない負エネルギー状態（"孔"）ができたとき、それが陽電荷をもつ正エネルギーの粒子のように観測されるという。

ただディラックは、電子とこの空孔の表わす陽粒子との間の対称性をすぐには見抜きえなかったこと、また新粒子の導入をいやがる当時の風習に影響されて、この陽粒子を、ほかならぬ陽子に同定した。しかし、彼自身やオッペンハイマーが電子とこの空孔とが2個の光子（γ線）を出して消滅する確率をディラックの輻射論に従って計算した結果、それは素早くおこり、したがって、もし陽子が空孔であるならば水素原子のようなものはきわめて不安定なものになってしまうということを見出した。そこで1931年に至り、ディラックはこの陽粒子を電子と同じ質量をもった未発見の陽電子とみなすに至った。[22] とにかく、このディラックの空孔理論はまたまた奇抜なものであり、[23] パウリはこれを納得せず、その有名な著述（1933）のなかでそれを手きびしく批判している。しかし、この本が出版されるより前に"陽電子"がアンダーソンC. D. Andersonらによって宇宙線のなかに発見された（1932年）。ついでγ線によって電子－陽電子の対が発生することがキュリーとジョリオ I. Curie–F. Joliotやブラケットとオキャリーニ P. M. S. Blackett–G. P. S. Occhialini らにより観測され（1933）、それがちょうどディラックの空孔理論で理解できることも後者により指摘された。こうして、当初ディラック方程式の欠点とみなされたものが美点に転じることになった。あとからみると陽

---

(22) この考えでは陽子に対しては反陽子が存在することになるが、この点に人々は長く抵抗を感じた。

(23) もっとも、原子の閉殻や金属の場合の"フェルミの海"などにおいて、空孔が陽の電子のようにふるまうということからのアナロジーは存在した（ハイゼンベルク）。

電子の発見は電子回折の場合と同様、もっと早くなされても不思議ではなかったことである。[24] こういう次第で、陽電子の発見をめぐる理論と実験との関係はスリルにみちている。またあとからみるとディラックは手品師のようなさばきで陽電子をとり出したようにみえるが、純理論的にいって、それは上にみたようにディラック理論から空孔理論を媒介にして認識された（下に記すように相対論的な場の量子化の直接的な帰結としてではなく）という点で独得の径路をたどっているのである。

陽電子は相対論的量子力学においては一般的に反粒子が登場するという新しい事態の最初の認識であり、以後の理論の展開において根本的な意味をもっている。一方、ディラックが1体のディラック方程式の負エネルギー状態の困難をさけるために、真空を無限個の負エネルギー電子の埋まったものとする解釈に進むことによって、必然的に多体問題へ移る結果になったということは、ディラック方程式もまた1体の確率振幅の方程式のままでとどまることはできず、"第二量子化" されねばならなかったということ、すなわち不定個の電子－陽電子を含む系の量子力学へと移行せねばならなかったということに見合っている。実際ヨルダン－ウィグナー流に電子場を量子化した前記のハイゼンベルク－パウリの理論において、電流密度の定義を

$$j_\mu=\frac{e}{2}(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi-\psi\gamma_\mu{}^T\overline{\psi})$$

のように "対称化" しておけば、ディラックの空孔理論と同じ結果になる。この場合には、真空ははじめからエネルギーも荷電もゼロの状態であり、電子と陽電子がいずれも正エネルギーの状態のみをもって対等な形で理論に入ってき、基礎法則は電子と陽電子のいれかえに対して対称である。つまり、この理論は空孔理論に比して "荷電共役" の対称性が明白である点で、より自然である。（このことはハイゼンベルク (1934) が示し、またクラマース (1937) らがしらべた。[25]）

---

(24) γ 線が物質にあたるとき、光子のエネルギーが閾値（しきい）をこえて上がっていくにつれて、対発生はコンプトン効果などよりも高い確率でおきるようになる。

しかし、次の点を注意しておく必要がある。ディラックの $\psi(x)$ が1個の粒子の確率振幅としての意義をもつというもとの考えは、一定の条件のもとでは妥当することがらである。すなわち外から加えた力が、エネルギーでいって $2mc^2$ なるギャップに比して小さいようなものであり、かつ $\hbar/mc$ の程度の距離でゆるやかに変化しているようなものである場合には、ディラック方程式の正エネルギーの解を用いてもとの見方が妥当する。これに対し、もとのディラック方程式を古典物質場に対する場の方程式とみなすということは、一つのフィクションである。つまり、そういう古典場は自然界に対応論的な意味での対応物をもっていない。にもかかわらず、第二量子化による電子－陽電子系への移行は、形式的にはこの架空の古典物質場を反交換関係によって“量子化”するという‘手続き’によって実現できる。

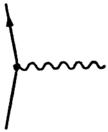
またディラックの空孔理論は、とにかく1体問題的な考え方で、量子電磁気学的過程における粒子の生滅（対発生、2個の γ への対消滅など）をあつかうことを可能にしていることも注目すべきことであって、このような方法はのちにファインマンによってさらに新たに発展されることになる。また真空が単なるカラッポではないというディラックの考えは残り、彼が空孔理論の立場で見出した“真空偏極”というような効果は、陽電子論的場の理論でも同様に存在する。量子電磁気学により、すでに真空は電磁場が量子的にゆらいでいる状態になっていたが、いまや「陽電子論」によって真空はさらに電流密度がゆらいでいる状態となり、電場がかかると偏極を生じるわけである。とにかく相対論的な場の理論によって「真空」の概念がそれ以前とはだいぶ変わってきたのであって、これまた重要な意義をもつことがらである。

とにかく量子電磁気学は場の量子論として建設されることになったが、その強みは電子場と電磁場とからなる系をひとつ考え、そこで電子場と

---

(25) これはその後、電磁相互作用と強い相互作用の「粒子–反粒子対称性」としてより一般的にとらえられ、‘荷電パリティ’（C）の保存則がひき出されることになる。

電磁場がいたるところで局所的に結合する相互作用を考えさえすれば——それは波動像と粒子像の同等性により粒子的描像でいうことにして図のように表わされる——光と電子（陽電子）の相互作用による任意の



可能な要素過程がすべて計算できるはずになっているところにある。実際、こうしていろんな過程——コンプトン散乱、対発生、電子－電子ないし電子－陽電子の弾性散乱、制動輻射、等々——を摂動の最初の近似で計算すると、実験とよく合う結果を与えることが示された。しかし前にものべたように次の近似を計算すると、発散の困難が現われてくる。これは場の理論ではいくらでも短波長高振動数の波——すなわち、いくらでも大きな運動量の中間状態——が存在しうることにもとづいている。[26] 典型的なものは、先にのべた電子の自己エネルギーや真空偏極、あるいは弾性散乱に対する輻射補正などの発散である。それで、これらの発散を合理的に処理するにはどうすべきかという問題が、以後の理論の展開の重要なモチーフとなった。

クライン－ゴルドン方程式を量子化された波動場の方程式に格上げすることによってその合理的な解釈を得るということは、いちばん簡単なはずだが、あとになった。それは電子がいずれにせよディラック方程式でうまく記述されており、スカラー粒子はさしあたり実験的対応物をもっていなかったからである。しかし1934年パウリとワイスコップ V. Weisskopf はこの問題をとり上げ、c－数クライン－ゴルドン場をハイゼンベルク－パウリの方式で正準量子化したものは、正負の電荷をもちボース統計に従うスピン・ゼロの同種粒子の系の相対論的量子力学を表わしていることをデモンストレートした。この場合も、正負の粒子は互

(26) それで、これを熱輻射論の場合とのアナロジーで「紫外発散」とよぶ。

いに反粒子の関係にある。[27] そしてこの量子化された理論では、もとのクライン－ゴルドン方程式を1体の確率振幅の方程式とみようとしたさいの確率の正負の困難は、電荷の正負ということに置き換えられて解消する。[28] 波動場ψはハイゼンベルク描像でtについて2階の方程式に従うが、その背後に状態ベクトルΨが別に存在していて、これはシュレーディンガー描像においてtについて1階のシュレーディンガー方程式$i\hbar\dot{\Psi}=\bar{H}\Psi$に従い、負確率は現われない。こうして、そもそもシュレーディンガー方程式の場合にまたディラック方程式の場合にそうであったように、クライン－ゴルドン方程式の場合にも、一度最初の解釈の変更をくぐることによって、(再解釈の仕方はこの三つの場合についてそれぞれ異なるが) 量子力学における正当な方程式となった。

パウリ－ワイスコップの理論は当初単にアカデミックなものとみなされ、さしたる関心をよばなかったわけであるが、ほどなく湯川理論において中間子を記述するものとして役立つことになる。

こうしていろんな場を量子化していくうちに、スカラー場やベクトル場（クライン－ゴルドン場、マックスウェル場）のようなものは交換関係によって量子化し、スピノール場（ディラック場）は反交換関係によって‘量子化’すれば、それぞれちょうど合理的な相対論的量子力学をもたらすことがわかってきた。この経験的なルールは、実際、相対論的量子力学の内面的なコンシステンシーからして基礎づけうることを、やがてパウリが証明することになる（1940）。そしてこのルールは、整数スピンの素粒子はボース統計に従い、半整数スピンの素粒子は排他律に――それゆえフェルミ統計に――従わねばならぬという「スピンと統計

(27) クライン－ゴルドン方程式においてスカラー場ψを実数としたものもc-数波動場として合理的なものであり、その量子化によって中性のスカラー粒子の集団をあらわす。これはのちにπ^0中間子の記述に役立つことになる。

(28) クライン－ゴルドン方程式は、じつは元来量子力学の確率解釈とは別個に登場し、アインシュタインやシュレーディンガーによって‘スカラー場の方程式’とよばれていたものであるが、このよび方が正当だったことになる。

の関連」を意味している。[29] この関連が複合粒子にまで当てはまるものとなることは明らかである。[30]

§14・4　原子核と新しい相互作用

量子力学はすでにのべたように原子構造の問題を中心として1927年ころに出来上がり、原子・分子・物性の問題で成功を収めてゆき、1930年ころには光をも含めて場の量子論が形成されるに至ったのであるが、この時点では、自然界は根本的に二つの荷電粒子（電子と陽子）と二つの力（電磁力と重力）からなるという描像[31]がむしろ強化されたようにみえた。そして原子核は、アストンが同位体についての近似的な整数法則を確認して以来、陽子と電子とからなると信じられてきた。ところが、この考えは量子力学との間にいろいろ矛盾を生み出すことになった。ことに電子のような軽いものを核内のような狭い空間に閉じこめようとすると、不確定性原理からして電子は非常に大きなエネルギーをもたねばな

---

(29)　上に言及した‘パウリの証明’には立ち入らないが、そういうことが論証できそうだということは直観的に憶測されよう。スピノール場はローレンツ群の２価の表現であるので観測可能な量は場自身ではなくしてその双１次な量のみであるべきだが、そのためには場は交換関係よりも、むしろ反交換関係によって量子化されるべきであろう（そのとき双１次な量は交換関係をみたすことになる)。他方、テンソル場（スカラー、ベクトルなど）はローレンツ群の１価表現であり、場自身が観測可能量である可能性があることから、それは量子力学の対応原理に忠実に交換関係によって量子化さるべきであると考えられる。もっと正当な理由づけは、エネルギーの正値性やミクロ因果性（オブザーバブルが‘空間的に’はなれた２点で可換であること）の要請からくる。

(30)　この点については、つとにアインシュタインがボースの統計を物質粒子に応用するにあたって、それを直ちに**複合粒子**である単原子の気体に用いたこと(§7・2参照)、および複合粒子の統計性に関するエーレンフェスト-オッペンハイマーの定理（1930）を想起すべきである。

(31)　そのころまでに他方では一般相対論を拡張して統一場理論をたてる試みがワイル、アインシュタイン、カルーツァらによりいろいろ進められてきたが、それらの背後にもこの世界像があった。

らないことになる[32]。さらにまた、核のこの“陽子－電子モデル”では、ある種の核（窒素 N^{14} など）で統計性についてのエーレンフェスト－オッペンハイマーの合成則が破れる結果になる。かくて量子力学の登場は、核に対する従来の陽子－電子モデルの変更を要求していたのである。

しかしながら、当時、人々ははっきりこのようなうけとり方をしたわけではなかった。ことに大御所ボーアは、上記のような困難やβ崩壊の連続スペクトルの困難に面して、逆に「法則の変更」を予想した。つまり量子力学は核内のようなせまい領域ではもはや成り立たないだろうという。さらにβ崩壊では、エネルギー保存則さえ破れるだろうという。このような法則の適用限界という考え方は、相対論また量子力学の形成を通じて自覚された重要な方法論的認識であったが、いまの場合、このボーアの考え方は量子力学の普遍性に対する見通しをあやまったものといわねばならない。とにかく、当時はっきり“中性子”を導入し、すすんで原子核の模型を変更しようとした理論家はほとんどいなかった。これはウカツといえばウカツなことである。

当時、原子核や宇宙線のほうの実験的研究も次第に新しく進展しはじめていたが、とくにα線を Be にあてたときに出てくる透過力の強い放射線に対するボーテ－ベッカー Bothe-Becker およびキュリー－ジョリオの研究は最も注目すべきものであった。そして最後に、チャドウィック J. Chadwick がこれを「中性子」と同定することになる（1932）[33]。

一方、その少し前にパウリは核のβ崩壊の連続スペクトルの謎を解釈するために、未知の中性粒子“ニュートリノ”を想定した。ただし、このような「実体の導入」にたよる解決は彼自身の趣味にあわぬもので、

---

(32) さらにディラックの電子論によるならば、電子をそのコンプトン波長よりも小さいような核内に閉じこめれば、電子は負エネルギー状態の重なった状態になる。

(33) 1932年は 'Annus mirabilis'（奇蹟の年）とよばれる。この年、中性子・重陽子・陽電子などの発見があいつぎ、コッククロフト－ウォルトン Cockcroft-Walton による原子核の最初の人工破壊もなされ、それらの実験的発見によって原子核－素粒子の時代が急テンポで勃興することになる。

"desperate" なものに思われたし[34]、懐疑派の彼はそれを論文に書くだけの自信をもちえなかった。(また彼の考えは電子とニュートリノが陽子とともに核内にあるというものであるから、そういう軽い粒子がどうやって核内に閉じこめられるかという前述の疑問については解決になっていない。) とにかく彼は、心中矛盾を感じたことが抑制となったか、このニュートリノ仮設をみずからの手で展開することはできなかった。

とにかく陽子が認識されてこのかた20年ほどの間、物理は新しい素粒子を導入することなしにやってきたのだが、いまや、にわかに中性子とかニュートリノ、あるいは先にのべた陽電子などの新しい素粒子が発見され、あるいは抱懐されるに至った。これまでまったく顧慮していなかった新しい素粒子がこの世の中にはいろいろ実在しているかもしれない、あるいはある極端な情況のもとでは生成するかもしれない、ということがようやく意識されはじめたのである。また、それとともに、それらの粒子——とくに中性子やニュートリノという中性粒子——にも働くような非電磁的な新しい相互作用の存在[35]ということも考えざるをえなくなった。

まずハイゼンベルク (1932) は、原子核が陽子と中性子とからできているというモデルにきりかえ、そのさい中性子は陽子と同じくスピン$\frac{1}{2}$をもちフェルミ統計に従う粒子であると仮定したうえで、この陽子－中性子系の力学を量子力学によってあつかうという路線をうち出した。ただし、ここで新しい事態は、陽子－中性子間の力の性質は原子や分子内の力が本質的に電気的なものとしてわかっていたような意味でわかってはいないことである。ハイゼンベルクはこの陽子－中性子間の力が飽和性をもっていることに目をつけて、それを水素分子における化学結合力

---

(34) プランクの場合も、量子の導入はみずからの保守的傾向にあわぬ絶望的ともいうべき乾坤一擲(けんこんいってき)によってなされたことは前にみた。

(35) 中性粒子にも、もしそれが電磁的構造をもっていれば電磁的な力も働きうる。実際、中性子は磁気能率をもっている。ただし中性子を核内に結合している力は電磁的な力とは非常にちがったいろんな特徴をもっている。

とのアナロジーで考え、量子力学的な“交換力”とみなした。すなわち陽子と中性子は電荷を交換して互いに転化しあうことによって両者間に力を生じると考える。そのさい陽子と中性子は電荷以外の性質が似ていることから、彼は両者を“核子”の二つの状態としてとらえ、両状態を区別し、また一方を他方に変える働きをするものとして、スピンを表わすパウリの σ-マトリックスとのアナロジーで τ-マトリックスを導入し、これのたすけでこの交換力ポテンシャルを書き下した。パウリの σ-マトリックス、ディラックの γ-マトリックスについで、いまここに τ-マトリックスが導入されたわけであるが、これらは物理的にそれぞれ独自の重要な意義をもっている。τ-マトリックスは第一に、似た二つの粒子について種類を変えること（陽子を中性子に、またはその逆）を、状態を変えることに見直しつつ簡便な仕方で（すなわちそれら粒子に場の理論のフォーマリズムを用いずにやる仕方で）量子力学的に記述することを可能にするという意味をもっている。（前にのべたディラックの2個のスピンの置換演算子のテクニックも転用できる。）このやり方は、つづいてのべるフェルミの理論や湯川の理論においてもうけつがれる。第二に、τ-マトリックスを通じてやがて核力の――ひいては「強い相互作用」の――“アイソスピン対称性”（“荷電独立”）が認識されるようになることである。[36]

ハイゼンベルクは核力について分子結合の場合とのアナロジーで、一種の“電子”をやりとりする描像を裏において考えたが、この描像をさらに追求することには疑問をもった。そして以後の進展は二つにわかれた。マヨラナ E. Majorana やウィグナーは、核力をもっと現象論的にあつかう方向をすすめ、それぞれ新しいタイプの力をつけ加えた。ただし、いずれにせよ、核力は電磁力とちがって短距離の強い力でなければならない。それにもとづいて核構造・核反応に関する実験の急激な進展

(36) τ-マトリックスは数学的には σ-マトリックスとまったく同じものであり、‘アイソスピン対称性’ SU (2) のリー代数の基礎表現に相当する。核力の荷電独立性はコンドン E. Condon やウィグナーらにより認識される（1936—37）。

を主として非相対論的な波動力学によって追求していくという方向の研究がはじまり、そこでは原子の量子力学において用いられてきたいろんな概念——スピン・パリティ・排他律等々——はいぜん有効である一方、衝突の理論や電磁的遷移の理論などは、核子の散乱や吸収、γ線分光学などに適合するようにさらに新たに発展させられることになる。しかし、これには立ち入らない。他面では、ハイゼンベルク理論の背後の機構を考え、核力やβ崩壊のオリジンを追求するという課題もまた浮かび上がってくる。

ハイゼンベルクの原子核理論が出たころ、あたかも一つの時代の転換がはじまった。ドイツの物理学はそれまで量子力学形成の中心であったが、1933年ナチスが政権を奪取しユダヤ系の学者を大量に追放したことによって、しかもかつてはすぐれた実験物理学者であったハイデルベルヒのレナルトやベルリンの国立研究所（ライヒスアンシュタルト）の総裁となったシュタルクが、その勢いにのっかって反動的・排外的な「ドイツ物理学」なるものを提唱し相対論と量子論に対する攻撃をつづけたことによって、急にさびれだした。同時に理論物理学において国際的な多極化が進み、ことにアメリカ・ソ連および日本の地位がせり上がってきた。量子力学の成立による理論物理学の革新ということも、それによって従来の後進国もある程度同じスタート・ラインにつく形になったという意味で、日本などと先進国とのハンディキャップを縮める一つの理由になったといえよう。

さてハイゼンベルク理論により、核内に電子は存在しないということになると、β崩壊で飛び出してくる電子はなんらかまさにこの崩壊のさいに創生されるものと考えねばならない。フェルミはパウリの想定していたニュートリノをとり入れ、β崩壊は核内で一つの中性子が陽子に変わることによって核がエネルギーの低いアイソバー状態（同重核）に変化し、同時に電子と（反）ニュートリノが創生されて飛び出してくる過程であると考えた。電子やニュートリノが創生されるということは、光量子の創生とのアナロジーをこれら物質粒子におしおよぼすことを意味する。ひとたびこの考えにふみきるならば、われわれはすでに電子やニュートリノを光量子の場合のように量子化された場の量子としてあつか

う「第二量子化」の理論をもっており、それによって電子やニュートリノの数の変わるような過程を量子力学にのせうることを知っているので、その定式化は実施できることである。すなわち電子もニュートリノも、ハイゼンベルク－パウリの量子電磁気学におけるように量子化されたディラック場としてあつかい、それらを創ったり消したりする相互作用を入れればよい。ただし、この相互作用はまったく新しいものであり、そのハミルトニアンの形は量子電磁気学の場合のように対応原理的理由によってわかっているわけではない。しかしながら、それはやはり局所的なものと考えられることや、また相対論的不変性や荷電の保存などの要請からして、かなりの程度までその形がおさえられてくるし、電磁相互作用とのアナロジーも発見法的に役立つ。こうしてフェルミは、この相互作用の形を想定し、そこからβ崩壊のエネルギー・スペクトルの式を導出することができた(1933)[37]。

このフェルミの仕事の意義は、これまで最も神秘的にみえていたβ崩壊をとにかく量子力学の圏内にひきおろしたこと、そのさい核のβ崩壊を核を構成するどれか一つの中性子の崩壊としてとらえ、そのため電磁相互作用とは異なる新しい「フェルミ相互作用」なるものを導入し、こうして素粒子論の新領域を開拓したこと、かつまた電子のような物質粒子についても、その生滅を許す場の量子論(しかも反交換関係によって量子化されたもの)の立場が不可欠と考えられることをデモンストレートしたことにある[38]。さらに中性子は少なくとも自由な状態では不安定な粒子であるという認識も含んでいる。

次におこったのは、このフェルミ相互作用がハイゼンベルクらの導入

---

(37) この仕事の速報をフェルミは最初 *Nature* 誌に送ったが、“あまりに思弁的なもの”という理由でレフェリーに拒否されている。

(38) その前年に見出された‘対発生’においても、電子と陽電子が実際に発生するが、この場合は電子数マイナス陽電子数は保存され、前述したようにこれはディラック流の空孔理論によって(すなわち負エネルギー状態の電子が正エネルギー状態へ遷移することとして)理解する余地があった(あるいはのちのファインマン流の見方ができた)。

したような核力をも説明しうるかという問題である。これはハイゼンベルクによって示唆されたが、タム I. Tamm やイワネンコ D. Ivanenko の分析は、この相互作用（すなわち核子間での電子とニュートリノの交換）では到底強い核力を説明しえないことを示した。そこで湯川秀樹は、大胆なイマジネーションでもって核力の背後にこれをとりもつ未知の'重い'（質量が核子と電子の中間であるような）ボース粒子を導入し、それを場の量子論の立場で考えた（1934年11月）。この新粒子は核子と相互作用するある未知の場（中間子場）の量子とみなされるべきものであって、この相互作用のためこれが仮想状態において1個核子間に交換されることがおきるが、そのことによって核力が生じることになる。それは、荷電粒子間の電磁力が電磁場の量子である光量子の交換によって生じるのと同様である。ただし中間子は光量子とちがって荷電と質量とをもつ物質粒子であり(39)、スピンをゼロとするならば、複素数のクライン－ゴルドン場の量子である(40)。そしてこの質量（それは電子の200倍ぐらいとする）のために、これによって媒介される核力は対応するコンプトン波長程度――つまり10^{-13}cm 程度――の短距離のものになる。また中間子が荷電をもつので、ハイゼンベルクが考えたような交換力を得るわけである。核子と中間子場との相互作用は新しいものであり、再びその形は対応原理的な意味であらかじめわかってはいないが、フェルミ相互作用の場合と似た推論でその形をある程度おさえていくことができる。その結合常数は、フェルミ相互作用の場合とは逆に、電磁相互作用の場合のそれに比してはるかに大きいと考えねばならず、湯川相互作用はまさにのちに"強い相互作用"とよばれるようになったものの原型である。

湯川理論は多くの予言（prediction）を含んでいる。当時、中間子は実験的にまったく知られていなかった。実際中間子は'重い'粒子であるから、これが核から現実にもれ出てくることは普通はないわけである。

---

(39) 当初、湯川はアインシュタインの'light quantum'に対比して、これを'heavy quantum'とよんだりしている。

(40) のちにアイソスピン対称性に合致するように中性中間子が追加される。

しかし湯川理論が場の量子論である以上、それはたとえば2個の核子が十分な高エネルギーで衝突するならば、中間子が現実に創出されるべきことを含意している。

フェルミ理論における一つの特徴は、フェルミがその相互作用を接触相互作用のようなものとみており、それを媒介する場を——したがってその場の量子を——考えなかったことである。これは、この“弱い相互作用”が極度に短距離のものであることをとらえたものといえる。それに反して湯川理論は、力を媒介する新しい場を導入するのである。それは場の量子論の考えのほとんど最初の最も見事な応用でもある。

なお湯川は、核子－中間子の相互作用のほかに、中間子が電子とニュートリノにこわれるような相互作用を別に導入しており、二つの相互作用の共存のために中性子が陽子と軽粒子にこわれる結果になるというβ崩壊の新しいスキームをも同時に提案した。このスキームはそのままの形では存続しなかったにせよ、とにかく中間子自身も不安定な粒子であるということを含意する。

湯川の理論は時代に先んじたものであり直ちに受け入れられたわけではないが、1936年アンダーソンとネッダーマイヤー S. H. Neddermeyer がこの湯川の中間子とおぼしきものを宇宙線硬成分中に観測するにおよび、この理論のくわしい展開が日本で、またヨーロッパやアメリカで着手されることになる。[41]「素粒子論」はいまやディラックにはじまる量子電磁気学、フェルミにはじまるβ崩壊と「弱い相互作用」の理論、湯川にはじまる中間子論と「強い相互作用」の理論の三本を軸として発展し

---

(41) 中間子論の発展史における特殊な twist は、宇宙線にみられたこの粒子が長く湯川の中間子とみなされたことによっている。これはじつは今日‘μ-粒子’とよばれる電子（陽電子）に似た粒子であった。湯川の中間子は、第二次大戦直後のころ（1947）パウエル C. Powell らによって実験的に発見されπ中間子と名づけられたものに相当する。両者を区別すべきこと、前者は後者の崩壊の産物であることは戦時中に坂田昌一らの「二中間子論」において提案されていた。中間子にまつわる理論と実験との関係は一筋縄ではなく、陽電子の発見の場合にもまして波瀾にみちている。

ていくことになる。そしてフェルミ相互作用の理論も中間子論も、量子電磁気学と同様、場の量子論としてすすめられ、やはり高次の過程を計算すると発散するという困難を内包していた。そのうえ「強い相互作用」については非摂動論的なあつかいが要求されるという厄介な面がある。しかしながら、このような——またその他さまざまの——困難の分析や、実験的進歩に支えられつつ理論は進展し、以後の素粒子論の新しい複雑な局面を織り出すことになる。

§14・5　粒子論的理論と場の理論

前二節でのべたように、相対論的波動方程式から出発し、これを導くラグランジアンにもとづく場の理論に進み、それを正準量子化するという方式は——種々の手当てを織りこみながら——粒子像とその生滅過程を記述し、またスピンと統計の関連をもたらすなどの一般的成功を収めていくと同時に、電磁過程・β 崩壊・核力などの実際問題において成果をあげていった。しかしながら、このゆき方が相対論的量子力学のモデルを見出していくうえで、いつでも最も適したものであるとは限らない。そもそも量子力学の一般原理はあらかじめラグランジアンと正準変数の存在を要求しているわけではないし、相対論的量子力学を粒子論的な見地にたって構成していくことを試みる余地は当然あるわけである。そのような仕事として、次にディラックの「多時間理論」、ウィグナーの“ポアンカレ群”の理論、ファインマンの“プロパゲーター”(伝播関数)の方法の三つにふれておこう。それらはいずれも素粒子論の発展に重要な意味をもっている。

ディラックの「多時間理論」(1932)は、(電磁場は場とするが)電子系のほうはきまった個数の粒子とする立場にとどまりつつ、相対論的な多電子系の電磁相互作用の量子力学をあらわにローレンツ共変な形に定式化するものである。そのため彼は各電子ごとに別々の時間座標を付与し拡張された“配位空間”における波動関数 $\Psi(x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots\cdots)$ を考え、これに対して互いに両立するある連立方程式を設定するゆき方をとる。この波動関数 Ψ はその変数である時空点が相互に空間的すなわち

$$|t_a - t_b| < \sqrt{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2} \Big/ c$$

なる限り、位置の確率振幅の意義をもっている（ブロッホ、1933）。ハイゼンベルク－パウリの量子電磁気学はローレンツ共変でないという欠点をもっていることを先にのべたが、このディラックの「多時間理論」は共変であり、しかもハイゼンベルク－パウリの理論と同等であることが証明できるのである。

さて相対論的な波動方程式としてディラック方程式もクライン－ゴルドン方程式もともに合理的なものであることが認識されるにおよび、可能なすべての相対論的波動方程式を見出すという課題が出てきた。この線でなされた代表的な仕事は、任意スピンの自由粒子に対するディラックの一般スピノール方程式（1936）であるが、ウィグナーはこの問題に少しちがったアプローチをした。すなわち彼は波動方程式から出発するのではなくして、閉じた系の理論は相対論的不変性、つまりポアンカレ群（ローレンツ変換と時間的・空間的並進の全体からなる群）に対する不変性をもつということから出発する（1937）[42]。この不変性に量子力学の重畳の原理と内積の絶対値の二乗が"遷移確率"の意味をもつこととを組み合わせるならば、自由な安定な"素粒子"[43]の場合について、1粒子状態ベクトル空間はとりもなおさずポアンカレ群のユニタリーな（したがって無限次元の）既約表現のベクトル空間でなければならぬことになる。つまり自由な"素粒子"に関する限り、量子力学と相対論が"ポアンカレ群のユニタリーな既約表現"というひとことで総括されることになる。そのような既約表現はポアンカレ群の二つのカシミール演算子の固有値に相当する m、s なる二つの数でラベルされるが、それはこの1粒子状態の質量とスピンを意味する。既約表現に属するベクトルは運動量とヘリシティの値で区別され、それによって無限次元表現をはこぶ

---

(42) この論文の公刊は1939年。

(43) より正確には "elementary system" で、これはじつは素粒子でも複合粒子でもかまわない。

わけである。この理論では本来運動方程式はいらないのであるが、この場合、状態ベクトルを共変的なベースへ、かつ x-表示 へ移すならば、それは前述の任意スピンのディラック方程式ないしバーグマン-ウィグナー Bargman-Wigner 方程式 (1948) のような相対論的波動方程式をみたすことになり、波動場の理論とのつながりを回復することになる。

ウィグナーの理論は自由粒子の相対論的量子力学であるのに対し、ファインマンの理論 (1949) は相互作用をあつかう。彼はディラック方程式を1体問題的に考える粒子的描像に立って、陽電子を時間を逆行する負エネルギー電子とする言い方によってディラックの空孔理論を言いかえ、プロパゲーター（グリーン関数）の考えでそれを新しく発展させた。こうして散乱の S 行列を与えるいわゆる“ファインマン・グラフ”のルールを半ば発見法的に導いた。

ここで話をもう一度、場の量子論にかえそう。ハイゼンベルク-パウリの相対論的な局所場の相互作用の量子論は、前にのべたように共変形式になっていないという形式上の欠点と、発散に導くという内容的な困難とを背負っており、早くから批判の対象であった。しかし、そうはいうものの、この理論は素粒子論の一般的な基礎として存続し、いろいろ使われ、しらべられ発展していった。とくに量子電磁気学の場合についてのそれの1950年ころまでの発展は重要であるが、この発展の内面的な動機となったことは、理論の完全な相対論的共変化、発散の処理、“くりこみ”の三点であった。この三点は実際は相互に密接に関連しているが、論理的には分けて考えることのできるものである。

このうち“くりこみ”は、相互作用が存在する限り観測される物理的な質量や結合常数は裸の質量や結合常数とは区別されねばならないという、一般的な事柄にもとづいている。このような“くりこみ”の考えは真空偏極や自己エネルギーの発散に関連してディラック (1934) やクラマース (1938) において芽生えていた。

一方、“理論の共変化”は朝永振一郎の「超多時間理論」(1943) によって遂行された。これは前述のディラックの多時間理論の方法を、電

子－陽電子系を場の理論であつかう立場へおし進めることによって、再び場の理論の立場で'相互作用表示'(“トモノガ描像”)において量子電磁気学——一般には場の相互作用の量子論——をあらわに共変的なものにもたらすことを達成するものである。ついでシュウィンガー J. Schwinger の同様の研究がなされた(1948)が、ダイソン F. Dyson (1948)はこの朝永－シュウィンガー理論にもとづいた“共変的摂動論”によってS行列の公式を書き下し、ファインマンが直観的に得た前述のファインマン・グラフのルールを基礎づけた。(44) この朝永－シュウィンガー－ファインマンの共変形式の量子電磁気学にもとづいてくりこみの処方を適用することにより、発散をあいまいなく分離して、有限の“輻射補正”を精密に計算することが可能になった。そして、あたかもそのころ観測された“ラム・シフト”や電子の異常磁気能率の実験値と精密に一致する結果を与えた。(45) この「くりこみ理論」は、発散量を電子の観測される質量や荷電のなかにくりこんでしまうという、かなりアクロバットな操作を含むものであるが、とにかくこれによって、くりこみ可能な相互作用に関する限りは、摂動展開にもとづいて発散をよけてとおることができることになった。こうして量子電磁気学は、ディラックの輻射論以来20年にして一応の完成に達したわけである。

---

(44) 完全に共変的な量子電磁気学の定式化のためには、さらに「不定メトリックの量子力学」の形式を利用することが必要である。この場合、ノルムの負の状態は付加条件により実際上消去されることになる(グプタ S. N. Gupta とブロラー K. Bleuler、1950)。

(45) 前に水素原子のスペクトルの微細構造がディラック方程式によって見事に説明されたとのべたが、それでこの問題が完全に汲みつくされたわけではなかった。一つは陽子と電子の磁気能率の相互作用のために、すべての準位がさらに二つにわれるという“超微細構造”であり、これはフェルミ(1930)によって説明された。もう一つは、ディラック方程式によれば量子数 n、j を同じくし l を異にする二つの準位が縮退しているはずだが、実際にはこの縮退はわずかに解かれていることであって、これはラム W. E. Lamb ら(1947)が巧妙な方法で観測した。ついで電子の磁気能率についても、ディラック理論の値“2”からのわずかのずれがあることがクッシュ P. Kusch らにより観測された(1947)。

しかし、“くりこみ理論”によって、ラグランジアンにもとづく相対論的な場の相互作用の理論が完全にコンシステントで、かつまた自然を正しく記述する理論として確立したとはまだいいきれない。第一に、くりこみ操作がその出発点に裸の質量とか裸の結合常数などの無限大の量を含んでおり、ゴースト（ghost）のような矛盾を内包しているおそれがあることである。

第二に、フェルミの相互作用はくりこみ可能でないので、「弱い相互作用」はそのままではくりこみ理論の適用範囲に入らない。弱い相互作用の場合、さしあたり最低次の摂動で間に合うにしても、論理的にはやはり発散をほっておけない。

第三に、湯川相互作用はくりこみ可能であるが、こういう「強い相互作用」については摂動論がよい近似を意味すると考えられないので、くりこみ操作がもとの形では適用できない。

そこで強い相互作用をあつかうためのゆき方として、くりこみ理論のゆき方を逆転することが考えられだした。すなわち発散する裸の質量と結合常数というようなものから出発するのをやめて、観測される（すなわちくりこまれた）質量と結合常数から出発して、“外側から”の理論をたてるように進む。そのためにまず従来の場の理論の構造を吟味しつつ、これをバラし、そこから抽出される一般的な原理あるいは前提——それはつまり相対論と量子力学の原理を中心とするものなのだが——から出なおして、従来の場の理論の数学的なあいまいさを極力避け、内的なコンシステンシーをまもって進み、局所場の理論の枠組をおさえていき、そのさい粒子的解釈が保証されるようにする。これは“公理論的な”場の理論のアプローチを意味する。そこから解をエキスプリシットに得ることはできないにせよ、解に関する有効な関係や一般的な結果をひっぱり出すことができる。相対論的因果性に関係して散乱振幅について導かれる「分散関係」（dispersion relation）はその例である。このようなゆき方はレーマン H. Lehmann ら（1955）にはじまる。

さらに、そこで立場をもう一度転換して、散乱振幅に関する解析性やユニタリティーの関係でもって場の理論ばなれしていって、“解析的S

行列理論”として自立しようとする動きが、1950年代の終わりころからチュー G. F. Chew らの手で勃興するに至った。[46] さきにのべたディラックの多時間理論やファインマンのプロパゲーターの理論は、粒子論的な理論としてすすめられたが、結局、場の量子論に吸収された。これに対してこのＳ行列理論は、場の理論から離陸しつつ、粒子論的な立場で相対論的・量子力学的な相互作用の理論を、とくに強い相互作用の場合について追求する一つのゆき方である。そしてそこでは解析関数というものが中心的な道具として登場することが理論の新しい数学的特徴になる。

1950年代来、新しい素粒子、とくに強い相互作用をする粒子（従来の核子・中間子のほか、新しい類似の粒子や“共鳴”をふくみ、“ハドロン”と総称される）がぞくぞく発見され、そのなかには高いスピンのものもふくまれていることがわかってきたが、こうなると、それぞれの粒子ごとにそれぞれの場をあてがうというやり方にいつまでもとどまっているわけにはいかず、むしろそれらをより統一的にあつかうことをさがし求めねばならなくなってくる。そしてそれらさまざまの素粒子の存在のパターン自体を説明するという課題がクローズアップしてきた。上記のＳ行列理論はその目的のためにも、一つの有力なアプローチを提供することになる。

しかし、この目的に対して、他方ではハドロンをより要素的な少数の仮設的粒子（“クォーク”とよばれる）からできた複合粒子とする見方が

---

(46) すでに以前にハイゼンベルク（1942）は、ラグランジアンにもとづく場の量子論の難点をラジカルに克服するために、場の概念自体から脱却しようとするＳ行列理論の方向を構想していた（1942）。これは方法論的には彼の行列力学の発見の場合に似た、より実証主義的立場をとるものである。それによれば、そもそもハミルトニアンあるいは運動方程式によって刻々の運動をおっかける必要はないのであり、Ｓ行列要素をきめることが問題なのである。そこでこの、ユニタリーでインヴァリアントなＳ行列を、場とハミルトニアンを媒介にすることなしに、もっと直接的にきめるように理論を定式化することをもとめる。この考え方が、その後‘くりこみ理論’の経験をへたうえで、また‘分散関係’の研究の進展をふまえて、チューらにおいて復活したわけである。

おこり、これで多くの事柄を幸便に説明できることが示された。そして、そのようなクォークおよびクォーク間の相互作用を再び場の量子論であつかう立場が強まっている。ただこの場合、ハドロンの“複合性”というのは原子や原子核の場合のそれとはちがった、なんらか新しい概念を表わしていると考えられる。この“複合性”は普遍的なものであって、すべてのハドロンが複合的であるとみねばならないのだが、その構成子たるクォークは単独では観測されず、クォークを結合する場の量子も観測されない。それでクォークを“幽閉”するメカニズムが種々憶測されている。しかしハドロンが、元来一人歩きして出てこないような本性のクォークの特定の組で“できている”というテーゼはパラドキシカルである。それは一般的にいって、ハドロンの単一性と複合性の矛盾とよぶべきものの一つのあらわれであると思われる。このような矛盾は前期量子論期における“粒子性と波動性のディレンマ”にも比しうるような本質的なもの（またやや別の言い方では、ラザフォードの原子模型の不安定性の困難に比しうるもの）であって、その解決が将来の新しい合理的な素粒子論に導くことになると思われる。

先に公理論的アプローチにふれたが、そこでの一つの動機は、場という無限大の自由度の系の量子力学を数学的に従来よりももっと正当なやり方であつかおうとするところにあった。そのような研究から、場というような“無限系の量子力学”については、（それが相対論的である場合でも、ない場合でも）従来の有限自由度の量子力学の場合になかった新しい事情がいろいろ存在するということが認識された。その一つは、(13-6′) 式のような正準交換関係をみたす演算子でフォック表現と同値でないものが無数に存在することである（このことは、1950年代にハーク R. Haag らによって明らかにされた)。

このことに関連して、そのような力学系では“対称性の自壊”とよばれるような情況がおこりうることになる。そのような例は物性論の領域で実際いろいろ存在する（強磁性・超電導など）が、素粒子論のほうでも自然がこれを利用しているということがあるという推測が提起された(ハイゼンベルク、南部陽一郎、1961)。その場合には、ラグランジアン

のもっている対称性に関して非対称的な状態が安定な“真空”に対応することになり、その真空で、あるスカラー場がゼロでない期待値をもつことになる。

「弱い相互作用」については、フェルミ以後二十数年にして、そこでは空間反転の対称性や荷電共役の対称性が破れているという発見（リー T. D. Lee とヤン C. N. Yang、1956）[(47)]、弱い相互作用が V–A カレント同士の結合という型をもつという認識（ファインマンとゲルマン M. Gell-Mann、1958）などがなされるにおよび、理論が新しい段階に入ることになる。こうなってくると、弱い相互作用が未知のベクトル・ボゾンで媒介されるという考え方も自然なものになり、またその普遍性(universality) の概念や電磁相互作用とのアナロジーも強化された。ただし、発散の問題は依然として残っていた。ところが近年（1967年以降）ワインバーグ S. Weinberg らは、弱い相互作用を媒介するベクトル・ボゾンをある種の“非可換ゲージ場”に属するものとみなし、元来存在していた局所的ゲージ対称性が自壊するというモデルを考え、これによって弱い相互作用（少なくともレプトン間のそれについて）をくりこみ可能なものにもたらしうることを示した。しかもこの理論は、同時に電磁相互作用と弱い相互作用とを統一するという意味をもっている。

本章でわれわれは量子力学と相対性理論の結合についてのべ、それがおのずから素粒子論の方向に進むのをみた。ここではしかし量子力学と相対論の結合のモチーフをたどったのであって、素粒子論の展開を全面的に論じようとしたのではない。たしかに素粒子論にとっては量子力学と相対論はその二本のもっとも強固な支柱である。ただし、それのみで素粒子論の問題がすべてが片づくのではない。そこから発散の困難とい

---

(47)　これらの対称性——さらには *CP* 対称性まで——が破れても、局所場の理論ではいわゆる“*CPT* 定理”（リューダース G. Lüders、1954）はつねに成り立ち、粒子と反粒子の質量や‘全幅’（崩壊の全確率）が等しいことなどにかわりはない。

われるような内面的な困難が生み出される一方、他方では、たとえば内部対称性とその特定の破れ方、（局所的）ゲージ不変性などのような他の仮設を追加していかねばならないし、まだまだ実体論的な考察も深めていかねばならないのである。

§14・6　おわりに

われわれは本章で量子力学が相対性理論とともに、素粒子とその相互作用というような極微の領域をさぐるうえに有効に働くことをみた。他方、量子力学が成立して以来のこの半世紀近くの間に、他の多くの分野で量子力学の有効性がますます豊かにデモンストレートされた。磁気共鳴、中性子回折、メーザー・レーザー、メスバウアー効果、あるいはまた原子核の殻模型と集団運動模型、超電導のＢＣＳ理論、液体ヘリウムの超流動の理論、あるいはもっと広くいって固体論、核反応論、量子化学、量子光学、等々はその例である。こうして量子力学が微視的世界の広大な分野を支配する一般法則であり、したがってそれらを理解するための共通の言葉を提供するものであることはますます明白になった。

しかし量子力学の歴史が完結したというわけではない。素粒子の構造が問題となってくるような極微の領域での困難や謎のほか、観測の理論、量子力学と一般相対論との関係などに関連して、将来さらにその基礎が改変されるかもしれない。そして時空と物質と量子の概念がさらに統一される方向に理論は進むであろう。

文献リスト

量子論の生成に関連のある文献や資料は厖大である。そして科学史の論文はその性質上随所で文献を頻々と引用するのが通例である。その引用は普通の物理の論文の場合と同様の意味あいで——すなわち自己の所説に関連のある他の先行する研究として——なされていることもあるが、むしろその大部分は、その所論がいかなる情報源、いかなる証拠にもとづいているかを明示する意味でなされているのであって、このことは所論の客観性を正当化するために必要なことなのである。ただ、そのために資料の列挙と考証は煩瑣なものとなり、これに多くのページをあてねばならなくなるだけでなく、本筋の議論が間のびするという不便がある。それで本書では関連箇所でその都度文献や資料をあげるということを省略し、単に代表的な、また鍵として役立つような文献をいくつかのカテゴリーに分類して（この分類は便宜的なものにすぎない！）、以下にリスト・アップするにとどめることにする。かつそれも量子論の1930年ころまでの歴史に関係する文献にとどめる。

もとより量子論史の資料としては、こういうもののほかに、さまざまのよりインフォーマルなものもあり、本書にはそういうもの——筆者の私的な見聞によるものも含めて——も多少とも使われている。

A

基礎的な資料となるものは原論文である。しかし、それをここに列挙することは再び省略する。その大部分は以下のD、Fにあげてある本（たとえば文献**47**）の引用を通じて容易にたどることができよう。

またここ十数年来、量子論の原論文の主なものを適宜えらび翻訳・復刻することがあらためてなされている。次がそれである。

1 B. L. van der Waerden, ed.: *Sources of Quantum Mechanics* (North-Holland, 1967; Dover, 1968)

2 G. Ludwig: *Wave Mechanics* (Pergamon, 1968)

3 物理学史研究刊行会編「物理学古典論文叢書」(東海大学出版会, 1969—71)

1. 熱輻射論; 2. 光量子論; 3. 前期量子論; 9. 原子模型; 10. 原子構造論

以上にはいずれも有用な解説や科学史的分析が付せられている。

またプランク、ゾンマーフェルト、エーレンフェスト、ボルン、クラマース、パ

ウリ、フェルミ、フォン・ノイマンらについては全集（ないし選集）が出ているので、彼らの論文はそこで見ることができる（のみならず、その学術論文以外の著作もそこで見られる）。

ボーアの全集は現在 vol. I と vol. III だけが出ている。ボーアの1913年の3部作はローゼンフェルト L. Rosenfeld の解説（この解説は『自然』1968年4—6月号に江沢洋訳註で掲載されている）を付して別に復刻出版されている。

シュレーディンガーの波動力学の論文は早く次の本にまとめられた。

4 E. Schrödinger: *Abhandlungen zur Wellenmechanik* (Barth, 第2版, 1928)〔邦訳,「シュレーディンガー選集」第1巻, 共立出版, 1974〕

アインシュタインについては、邦訳の「アインシュタイン選集」が出版されている（湯川編, 共立出版)。とくにその第1巻（1971）と第3巻（1972）がいま関係がある。

ドブロイの1924年の学位論文も復刊されている。*Recherches sur la Théorie des Quanta* (Masson, 1963)

その他ソルヴェー会議のレポートなども、論文と同様に基礎的な資料に属する。(これは第1回（1911）から第7回（1933）までは Gauthier-Villars, Paris から出ている。)

B

仕事がなされたさいの実際の道ゆきや模索の様子・研究者相互の影響・雰囲気などをうかがううえで資料として有用なのは、当事者間にかわされた手紙である。上記文献**1**や、ボーアの全集I、IIIなども、そういう手紙を含んでいるが、ほかに本になって出ているものとして

5 A. Hermann, ed.: *Einstein/Sommerfeld Briefwechsel* (Basel, 1968)〔邦訳, 法政大学出版局, 1971〕

6 Born, ed.: *Einstein/H. and M. Born Briefwechsel 1916—55* (München, 1969)〔邦訳, 三修社, 1976〕

7 K. Przibram, ed.: *Briefe zur Wellenmechanik* (Wien, 1963; 英訳 Philosophical Library, 1967)

これはシュレーディンガーとプランク・ローレンツ・アインシュタイン間のもの。

また文献**54**や（F-5）にあげる本などもそういう手紙を含んでいる。

もちろん手紙には公表をはばかるようなものも多いはずで、ことにパウリの手紙は一部が公表されているにすぎない。この公表はいまなお人々を傷つけることが多すぎるのでパウリ未亡人がそれに同意しないためといわれる。

C

仕事がなされたさいの実際の情況・背景をうかがうには、また当事者ないしそのまわりのインサイダーによる回想記が重要な資料になる。著書のほか、それはいろんな機会——symposium, jubilee, obituary, など——に語られ書かれ、いろんなところ（雑誌、会議のプロシーディングズなど）に散らばって出ている。そのほか科学史家が存命の学者とインタヴューを行なって記録した場合もある。科学者の回顧録にそうホラやチャランポランはないが、本人の口から語られる場合でも想い出のうちに色づけされる可能性があることに注意を要する。しかし、そういう場合でも語る人の個性があらわれていて面白い。また本人自身の回顧によってその仕事がなされたさいの彼の思索まですっかり明らかにされるかといえば、それには限度がある。仕事にうちこんでいればいるほどその精神状態はそれを観察する状態と両立しないという"相補性"がある。

以下、主として本にまとまっているものをあげよう。

8 *Nobel Lectures, Physics* (Elsevier)

これはノーベル賞受賞にさいしての講演を英訳で4冊にまとめて出したものであるが、その最初の3冊（1901—21, 1922—41および1942—62）がいま関係がある。

9 M. Planck: *Wissenschaftliche Selbstbiographie* (Leipzig, 1948)

10 A. Einstein: "Autobiographisches" in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* (P. A. Schilpp, ed.) (Tudor, 1949)

11 A. George, ed.: *Louis de Broglie, Physicien et Penseur* (Albin Michel, 1953)

12 M. Born: *Physik im Wandel meiner Zeit* (Vieweg, 1957) 〔邦訳，東京図書，1971〕

13 M. Fierz and V. Weisskopf, ed.: *Theoretical Physics in the Twentieth Century* (Pauli memorial volume) (Interscience, 1960)

14 S. Rosenthal, ed.: *Niels Bohr* (North-Holland, 1967) 〔邦訳，岩波書店，1970〕

15 A. Salam, ed.: *From a Life of Physics* (IAEA, 1968) 〔邦訳，海鳴社，1975〕

16 W. Heisenberg: *Der Teil und das Ganze* (Piper, 1969) 〔邦訳，みすず書房，1974〕

17 A. Salam and E. P. Wigner, ed.: *Aspects of Quantum Theory* (Cambridge Univ. Press, 1972)

18 P. A. M. Dirac: *Some of the Early Developments of Quantum Theory*

(Plenum, 1973)
19 J. Mehra, ed.: *The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, 1973)

なおこの四半世紀間に量子論の形成にたずさわった当事者の多くが順次他界していった。フェルミ、フォン・ノイマン、アインシュタイン、パウリ、ボーア、コンプトン、フランク、デバイ、シュレーディンガー、ボルン、……。さらにこの二、三年の間にはローゼンフェルト、ハイゼンベルク、ランデ、ランチョス、スレーター、菊池、……。存命の学者は、ドブロイ、クライン、フォック、フント、ヴェンツェル、ディラック、ヨルダン、ウーレンベック、ハウシュミット、クローニッヒ、マリケン、ファン・フレック、ウィグナー、ハイトラーらである。

D

仕事が進行しつつある時期に学者が書いた量子論の著述は、おのずから歴史をかなりつよく反映する。その代表的なものは

20 M. Planck: *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung* (Barth, 第1版, 1906)〔邦訳, 東海大学出版会, 1976〕
21 A. Sommerfeld: *Atombau und Spektrallinien* (Vieweg, 初版1919, 第4版1924)〔邦訳, 講談社, 1973. ただしこれは第5版 (1931) によっている〕
22 F. Reiche: *Die Quantentheorie. Ihr Ursprung und ihre Entwicklung* (Berlin, 1921)
23 J. H. Jeans: *Reports on Radiation and Quantum Theory* (第2版, 1924)
24 石原純：物理学の基礎的諸問題 (第2輯) (岩波書店, 1926)
25 M. Born: *Vorlesungen über Atommechanik* (Springer, 1925)〔邦訳, 岩波書店, 1930〕
26 M. Born: *Problems of Atomic Dynamics* (The MIT Press, 1926)〔邦訳, 三省堂, 1973〕
27 W. Pauli: *Quantentheorie* (Handbuch der Physik Bd. 23, 1926)
28 F. Hund: *Linienspektren und Periodisches System der Elemente* (Springer, 1927)
29 R. A. Millikan: *The Electron* (The Univ. of Chicago Press, 1917)

E-1

量子力学が成立して間もなく書かれた量子力学の本には、当時の把え方、問題意識、進歩の歩みの情況の反映が見られる。

30 A. Sommerfeld: *Atombau und Spektrallinien, Wellenmechanischer Ergänzungsband* (Vieweg, 1929)

31 W. Heisenberg: *Die Physikalische Prinzipien der Quantentheorie* (Hirzel, 1930)〔邦訳，みすず書房，1954〕
32 L. de Broglie: *Introduction à l'Étude de la Mécanique Ondulatoire* (Hermann, 1930)〔邦訳，岩波書店，1934〕
33 M. Born und P. Jordan: *Elementare Quantenmechanik* (Springer, 1930)
これは文献**25**の続篇の形で書かれたが、パウリの辛辣な揶揄をかうことになった。
34 H. Weyl: *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (Hirzel, 第2版, 1931)〔邦訳，裳華房，1932〕
35 E. P. Wigner: *Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atome* (Berlin, 1931)〔邦訳，吉岡書店，1971〕
36 P. A. M. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford Univ. Press, 初版1930, 第2版1935)〔邦訳，岩波書店，1936〕
37 J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, 1932)〔邦訳，みすず書房，1954〕
38 W. Pauli: *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik* (Handbuch der Physik, Bd. 24, 1933)〔邦訳，講談社，1975〕
39 J. H. van Vleck: *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities* (Oxford Univ. Press, 1932)〔邦訳，吉岡書店，1958〕
40 N. F. Mott and H. S. W. Massey: *The Theory of Atomic Collisions* (Oxford Univ. Press, 1933)〔邦訳，吉岡書店，1962〕
41 W. Heitler: *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford Univ. Press, 1936)〔邦訳，吉岡書店，1957〕
42 E. C. Kemble: *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, 1937; Dover, 1958)
43 H. A. Kramers: *Die Grundlagen der Quantentheorie, Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung* (Akad. Verlagsgesell, 1938; 英訳 Dover, 1964)
以上のうちの多くは量子力学の教科書として今日でも生命をたもっている（**40**、**41**は再版が訳されている）。

E-2

比較的新しい量子力学の教科書で歴史的記述を含んでいるものとして
44 朝永振一郎：量子力学　I，II（みすず書房，1952—53）
これは教育目的にあうように科学史的素材を自由に組みかえているが、量子力学が形成されていくさいの人々の問題のたて方や考え方の急所を解明しようとしてい

る点で、科学史の立場からも重要な内容を含んでいる。筆者も早くこの本から大いに教えられた。

量子論の発展を科学史的にあつかったものを次にいくつかに分類してあげよう。

F-1

まず通史的なものとして次があげられる。

45 天野清：量子力学史（日本科学社，1948；中央公論社，1973）

46 E. Whittaker: *A History of the Theories of Aether and Electricity II*, The Modern Theories (Nelson, 1953)

47 M. Jammer: *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, 1966)（邦訳，東京図書，1974）

この本は documentary な量子力学史として便利な手引きとなろう。筆者のこの本に対する評は『科学』1975年7月号にある。

48 F. Hund: *Geschichte der Quantentheorie* (Mannheim, 1967)

F-2

量子論の初期の歴史に関するものとして次のようなものがある。

49 L. Rosenfeld, *Osiris* **2**, 149 (1936)

50 天野清：熱輻射論と量子論の起源（大日本出版，1943）

51 武谷三男：量子力学の形成と論理　I—原子模型の形成（銀座出版，1948；勁草書房，1972）

筆者もまたこの方面で昔多く書いたが、本書では重複をさけあまり活用していないので、ここにそれを一括してあげておく。

52 高林武彦：量子力学史　I　電子の発見（『自然』1949），II　スペクトルの解読（同1950—51），III　荷電雲原子（同1951—52）
高林武彦：古典物理学の崩壊過程（『科学史研究』11号，1949），熱輻射論の構造（同14号，1950），振動子と荷電雲（同19号，1951），長岡の原子模型の再評価をめぐって（『物理学会誌』，1974年8月号）

53 広重徹：物理学史　II（培風館，1968）

54 A. Hermann: *Frühgeschichte der Quantentheorie (1899—1913)* (Mosbach, 1969；英訳 The MIT Press)

55 H. Kangro: *Vorgeschichte des Planckschen Strahlungsgesetzes* (Steiner, 1970)

56 西尾成子編：アインシュタイン研究（中央公論社，1977）

F-3

量子力学の成熟期についてのものとして

57 朝永振一郎：スピンはめぐる（中央公論社，1974）

これはエッセイ風の記述のなかに科学史的あつかいと著者自身の勉強・研究の回想・証言とが渾然一体となっている。

とくに解釈問題に関する歴史的あつかいとして

58 M. Jammer: *The Philosophy of Quantum Mechanics* (Wiley, 1974)

F-4

量子論史の個別的な問題についての科学史的研究はいろんなところに発表されているが、ここでそれをリスト・アップすることは略する（前にあげた文献のうち49、56などはその例である）。近年この種の論文は主として次の雑誌に発表される。

ISIS, Archive for History of Exact Science, Historical Studies in the Physical Sciences（年刊），*American Journal of Physics, Physikalische Blätter.*

F-5

学者を伝記的にあつかったもの。

59 Ph. Frank: *Einstein, his Life and Times* (Knopf, 1947)〔邦訳，岩波書店，1951〕

60 C. Seelig: *Albert Einstein* (Staples, 1956)〔邦訳，東京図書，1957〕

61 B. Hoffmann: *Albert Einstein——Creator and Rebel* (Viking, 1972)〔邦訳，河出書房，1974〕

62 B. G. Kuznetsov: *Einstein* (Moskva, 1965)〔邦訳，合同出版，1970〕

63 M. J. Klein: *Paul Ehrenfest* (vol. I) (North-Holland, 1970)

64 E. Segrè: *Enrico Fermi/Physicist* (The Univ. of Chicago Press, 1970)〔邦訳，みすず書房，1976〕

65 A. Hermann: *Werner Heisenberg* (Hamburg, 1976)〔邦訳，講談社，1977〕

66 板倉－木村－八木：長岡半太郎伝（朝日新聞社，1973）

G

量子論に関する歴史的・思想的エッセイ。この種の文献も多いが、そのいくつかをあげる。

プランクのものは前にのべた全集に収められている。翻訳としては『現代物理学

の思想』上・下（法律文化社，1971—73）。アインシュタインについては前記の選集を見よ。

さらに世界の名著66，湯川－井上編『現代の科学』II（中央公論社，1970）にアインシュタインその他のいくつかの重要論文が訳出されている。

67 N. Bohr: *Atomtheorie und Naturbeschreibung* (Berlin, 1931)

68 L. de Broglie: *Matière et Lumière* (Albin Michel, 1937)〔邦訳，岩波文庫〕; *Physique et microphysique* (Albin Michel, 1947)

69 W. Heisenberg: *Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft* (Hirzel, 1935, 1942, 1948)〔邦訳，みすず書房，1953〕

70 W. Pauli: *Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie* (Vieweg, 1961)〔邦訳，講談社，1975〕

71 L. Rosenfeld: *N. Bohr—An Essay* (1945)

72 E. P. Wigner: *Symmetries and Reflections* (Indiana Univ. Press, 1967)〔邦訳，ダイヤモンド社，1974〕

73 R. Feynman: *The Character of Physical Law* (The MIT Press, 1965)〔邦訳，ダイヤモンド社，1968〕

74 C. F. von Weizsäcker: ハイゼンベルクの物理学（『自然』1977年2月号）

75 湯川秀樹：存在の理法（岩波書店，1943）;『自選集』第1巻，第2巻（朝日新聞社，1971）

76 伏見康治：ろば電子（創元社，1942；中央公論社，1975）

77 武谷三男：弁証法の諸問題（理学社，1946）

78 坂田昌一：物理学と方法（岩波書店，1972）

79 富山小太郎：現代物理学の論理（岩波書店，1956）

80 高林武彦：現代物理学の創始者 (1)ロレンツ (2)プランク (3)パウリ（『自然』1962—63）

81 江沢洋：量子と場（ダイヤモンド社，1976）

H

量子論の形成・発展を経済的・技術的背景から考察すること、また社会的・思想的要因を分析することは従来部分的にはなされていたが、まだあまり系統的には遂行されていない。最近の研究としては次があげられる。

82 P. Forman: Weimar Culture, Causality and Quantum Theory, 1918—27, *Historical Studies of Physical Sciences* **3** (1971)

83 L. S. Feuer: *Einstein and the Generations of Science* (Basic Books, 1974)〔邦訳，文化放送出版部，1977〕

なお社会的要因に関連しては、ユダヤ系学者の寄与の大きな比重ということも問題となろう。量子力学形成期までに寄与したユダヤ系学者としては、アインシュタイン、エーレンフェスト、フランク、ヘルツ、プリングスハイム、パーシェン、シュヴァルツシルト、エプシュタイン、ボルン、シュテルン、ラーデンブルグ、ルビノヴィッツ、ライヒェ、ヨッフェ、クライン、パウリ、ウーレンベック、ハウシュミット、ロンドン、ウィグナー、ノイマン、オッペンハイマーらがあげられる。

I

量子論の半通俗的な歴史的解説書はたくさんあり、それらのうちには教育的意味で非常にうまく書かれたものもあるが、ここではあげないことにする。

J

最後に本題をはなれるが、Eで量子力学の教科書をあげたので、この点について補足する意味で次の注意を加えておこう。

「量子力学」の教科書という立場からは、歴史的文脈をはなれて量子力学をひとつの完成された理論として論理的に展開するようなゆき方のものももとより必要である（ただし、その場合でも理論は実験によって検証されるものである以上、その叙述をまったく天下り的に展開することは困難である)。前のEにあげた本のうちディラックの本36はそういうタイプのものの代表とみられる。近頃のものとしてはヤオホ Jauch (1968) やシュウィンガー (1970) の本がある。また近年教育目的からしても、歴史的アプローチにともなう論理的迂回をさけ、むしろ新しい題材を使いつつ、できるだけ論理的にストレートに量子力学を提示するゆき方を考えている人も多い。ケンプファ Kaempffer (1965)、ファインマン (1965)、リプキン Lipkin (1973) などのそれぞれの本がその例である。しかし結局、量子力学に捷径の王道はない。

量子力学が成立して50年の今日、量子力学の教科書として依然ディラック、パウリ、朝永の本が名著としてとどまっているが、実用的なものとしてランダウ-リフシッツ Landau-Lifshitz (1958)、メシア Messiah (1960)、ゴットフリード Gottfried (1966) らの本、および岩波講座『量子力学』I・II・III (1971—72) をあげておこう。さらにボーム Bohm や山内の本がある。

あとがき

これは、かつて朝永振一郎編『物理の歴史』(毎日ライブラリー、毎日新聞社、1953) の長い一章として筆者の書いた「量子論」を土台として、今回新たに書き下ろしたものである。この「量子論」を書いたのは量子力学が成立して四半世紀をへたころであったが、それから再びまたほぼ四半世紀がたった。

このあとの四半世紀は、量子力学をめぐる客観的な動きからいっても、また筆者個人にとっても、決して短い時間ではない。だからいま上記「量子論」を土台にして書いたといったけれども、この時間の流れが当然この本にいろんな影響を及ぼしている。

個人的なことを二、三あげると、ひとつは筆者が在外中に、量子力学の形成にかかわりをもった学者の多くに接触する機会があったこと、また量子論の形成のゆかりの地をすべて歩いたことが量子論の歴史を考えるうえである種の支えになったことである。

また1969年来、名古屋大学理学部物理教室において量子力学の講義をうけもってきたことで——この講義は年度によって歴史的なアプローチと論理的なアプローチの間をゆらいだが——とにかく量子論史を反芻する機会となり、その草稿がたまることになった。

さらに1974年夏、日本で「第14回国際科学史会議」が開かれ、そこで講演を依頼された機会に、量子論史に関する考察をまとめて、

"Quantum Transition, Matter Wave, and the Formation of Quantum Mechanics."

と題して話したことである（これはこの会議の *Proceedings* に収められている)。じつはこれが直接のきっかけとなり、上記の古い「量子論」に講義草稿の一部およびこの論文の内容を加えていく形で、この本の執

筆にかかった次第である。

一方、1960年代来のひとつの顕著な客観的な動きとして、量子論についての実証的な科学史的研究の国際的な勃興をあげねばならない。こうしてとくに量子論に関する多くの歴史的資料の蒐集・整理・考証が行なわれた。それとともに当事者自身による回想記やエッセイもまた種々くりかえし書かれた（それらの一部は「文献リスト」のCとFにあげてある）。それでこの本をまとめるにあたって、私はまたこの新たな資料の整理に注意を払うことによって大きな便宜を得た。

こうして1976年初めには一応原稿ができた。その構成はあらくいって、量子の誕生から前期量子論にわたる第1部（第1—5章、第7章）、量子力学が形成される第2部（第6章、第8—11章）、および量子力学が発展していく第3部（第12—14章）からなっている。量子力学が成立してすでに50年をへた今日、量子論史を語るにはこの第3部の段階をおとすことはできないだろう。そこでは、量子力学の根本的な概念・原理は保持されているけれども多くの本質的な発展がなされた。しかしページ数の制約から、第3部は第1・2部と同じウェイトで問題をあつかうことはしなかった。（第1部と第2部はほぼ同じ長さであり、第3部はその半分たらずである。）

とにかく結果は、もとの「量子論」の3倍にもおよぶ分量になったが、それでももとの性格はたもっていると思う。いまや量子力学史の本は少なくないが、この本は、量子論をおし進めた主要な契機、その発展の構造、これをうらづける精神と方法といったところに主眼をおいた1個の量子力学史といえるだろう。

上にふれたように、この十数年来、量子論史の研究が国際的に盛んになってきた。科学史家によるこれらの諸研究は respectable なものであり、ことに事実関係を明確にするうえで多くの寄与をなした。ただそれらの研究はしばしば考証の微に入り細に入る反面、ともすれば“物理的直覚”を欠く傾向があるように思われる。それはかつてアインシュタインが「ほとんどの科学史家は文献考証学者であり、物理学者が何をねらいどのように思索し、いかにその問題と格闘したかを理解しない」（文献

56参照）といったのを想起させるようなものであることが少なくない。

一方アインシュタインは、物理学者についてはその多くが物理の歴史をみるさいに“歴史的感覚”を欠いているということも指摘している。つまり物理学者は hindsight（あと知恵）でもって歴史をみ、なにゆえそれぞれの重要な問題が実際はしばしば一見迂回したやり方でついに解かれたのかということの意味を理解しないことが多いのである。一般に、本質的に新しいアイディアは生みの苦しみともいうべきものを背負ってようやくにして生まれてくる。プランクの量子も、スピンも、ドブロイ波も、時間を含むシュレーディンガー方程式も、陽電子も、それぞれに迂路をへて発見され認識されたことについては本文でみた。

物理学の歴史を解明するためには、理想的にはそれぞれの重要な仕事について当の研究者と同じ程度の緊張を追体験するくらいの取組みが必要であると同時に、これをより批判的な立場から掘りさげて、パウリ（1925）のいう“physikalischen Kern blosszulegen”——すなわち朝永のいう“物理的核心をえぐり出す”——ことが併せて必要である、と思う。これによってそれぞれの重要な問題が実際に解かれたさいの“迂回”や独得な進み方が、物理学のそのときの発展段階と物理学自体の構造にうらづけられる意味をもっていることも解明されるのである。

科学史では、さらにそれぞれの研究者の人間的・私的な面も問題になってくる。研究者もまた単に人間であり、彼が創造的な研究をする場合、情緒をまじえず完全に論理的な頭で仕事を進めるわけではない。オプティミズムと懐疑、スリルと挫折感のなかで格闘する。ディラックは自分の経験をふりかえって次のようにいっている。「研究者は大きな希望と同時に大きな怖れをいだきながら仕事をすすめる——そもそも人が大きな希望をもつということが、同時に大きな怖れをまじえることなしに可能だとは思われない」と（文献18参照）。

そこで創造的な研究がなされる場合の研究者の頭の動きやそれにともなう psychology、またそういう研究者間相互の関係なども問題になってくる。こういう面に立ち入ることは非常に興味あることであるが、同時にかなり危険なことであって、それは仕事の内容を深く把握したうえ

でのことでないとあまり意味がない。また個々のセンチメンタルなことがらは、科学の歴史の大きな流れの観点からは必ずしも重要でないことも念頭におくべきである。とにかくこの本では、こういう側面にもあえてなにほどか立ち入った。

この本は全般的な量子力学史としては、ことに次の点で不十分である。第一に、これは量子論史におけるブリリアントな傑作の仕事を追い、もっぱら表街道をのべ、その裏にある多くの失敗的な仕事ないしは下積み的な仕事にはページ数の制約もあって結局あまり立ち入れなかったことである。そのため歴史がいささか英雄主義的になりすぎたきらいがある。量子論形成の30年がとくに“英雄の時代”であったことは事実であるが、それでもやはり科学の進歩の実体を正しくとらえるには、失敗的な試みや地味な寄与もあわせ考察することが必要なのである。この本では、長岡やボーアのリング原子の古典力学的安定性の研究、プランクの第二理論、ボーア－クラマース－スレーターの理論などにも言及したが、ほかにもたくさんの多種多様な埋もれた試みがあるわけである。

第二に、量子論の起源とその生成を歴史的に解明するには、その社会的・思想的背景にまで立ち入る必要があり、また実験技術的基盤も系統的にあつかう必要があるが、そういう面についてこの本は断片的・現象的な記述にとどまり、本格的にあつかう余裕がなかった。また研究者間の競争と協力、研究の組織に関する問題などについても断片的な記述にとどまっている。

さらにこれらの点を別としても、なおいろいろ叙述の不十分なところがある。元来これは歴史的に著名なことがらを網羅的にのべようとしたものではなかった。そのうえそれぞれの仕事についてもその本質的なアイディアを突っ込んで考察することを主としており、具体的な証明などには立ち入っていないことが多い。それでこういう点を確かめたい読者は原論文なり他の書物によられたい。

またすでにふれたように、「量子力学の発展期」についてはこれを全般的にあつかっておらず、‘量子力学と相対論の結合’というモチーフを中心とした話に限定している。この間の量子力学にかかわるきわだった

発展として、もう一つとくに注目すべきものとして、極低温における超電導・超流動の理論の進展があげられる。そこではミクロの粒子の波動性がマクロなスケールで現出され、物質波の波動関数が長距離秩序を表わすパラメターの役割をするものとして立ち現われ、渦の強さとか磁束のようなマクロな物理量の“量子化”がおきる。この理論は量子論の成長について第7・13章でたどったものの発展という意味をもっており、量子力学自体の階層的構造とか概念の二重性とよんだもの（第13章参照）の一つの面を表わしている。この意味深い発展にふれることができなかったが、それについて――またより一般に多体問題に関連した量子力学の重要な展開について――は他の書物を参照されたい。その他たとえば量子力学の解釈と観測の問題についてはこの本では“コペンハーゲン解釈”にゆきついたところで話をほぼ終えており、この問題についてのその後の経緯には立ち入っていない。これについて関心のある読者は、「量子力学における観測の問題」と題して別に書いた拙稿（近刊）を参照されたい。

他面この本は本来解説的な性質のものではないけれども、なるべく広範囲の読者に読まれることを願っており、記述を平易にするためにやや冗漫になったところもある。

この原稿が1976年初めころに一応できたのち、たまたま内容の一部について名大と阪大で講演し討論する機会があった。また同じころ朝永先生に会った機会にいろいろお訊ねし示唆を得た。これらは原稿の推敲に有益であった。そしてその年の夏に原稿を「自然選書」編集室にわたしたが、そのあと筆者の病気などのため進行が少し手間どった。その間、乱雑な原稿を整理しかつまた表現をより明解なものにするうえで、編集室にたいへんお世話になった。これらすべての方にお礼を申しのべたい。さらにふりかえると、この『量子論の発展史』の源は、じつは筆者が戦後間もないころ「量子力学史」という表題のもとに『自然』に14回にわたって連載したもの（文献52）にまでさかのぼるわけで、いまこの本を上梓するにあたって、それ以来30年近くの間に直接間接多くの方々の援助・激励をいただいていることをあらためて思いおこす次第である。

この本はなお、史実とその評価に関して不適当なところとか、分析の不備なところなどをいろいろ含んでいることをおそれる。しかし、ともかくこれが量子論史にいささか新しい息吹きを吹きこみ、科学史の研究者だけでなく、量子力学について普通の教科書的な理解だけでは満足しない人、また物理学のそれぞれの領域で新しい理論を模索する人々になんらかの参考になるならば幸いである。

1977年春

著者しるす

高林武彦　たかばやし・たけひこ
1919年、兵庫県に生まれる。
1941年、東京大学理学部物理学科卒業。
名古屋大学理学部助手、助教授、CNRS研究員を経て、現在名古屋大学理学部教授。専攻、理論物理学、とくに量子力学・素粒子論。
著書に『熱学史』（1948年）がある。

自然選書　　検印廃止

量子論の発展史

著者　高林武彦

昭和52年7月15日初版印刷
昭和52年7月25日初版発行

発行者　高梨　茂
本文印刷　奥村印刷
表紙印刷　トープロ
製本　小泉製本
発行所　中央公論社
東京都中央区京橋2の1
電話(561)5921　振替東京2-34

自然選書刊行のことば

1972年3月

今日の人類にとっては、科学はすでに特殊専門の業務ではありません。それは、社会のあらゆる部分の深層にまで浸透し、現代における人間存在の根底にかかわるものとなりつつあります。今や、この巨人の出現と成長によって、思想も、文化も、教育も、人類全般の知的活動の型が、一時代前とは根本的に異なるものとなることをせまられています。

それにもかかわらず、わが国における出版活動がそのような時代の変化に的確に対応しえていたかどうかを考えると、残念ながらわたしたちは疑問を感じないではいられません。視野の限定された特殊の専門書とか、あるいは初学者のための入門書や解説書は少くありませんが、科学の問題を人間活動の中心的ジャンルの一つとしてとらえるという態度は、むしろ乏しかったように思われます。そのような反省の上に立って、わたしたちはここに新しく『自然選書』とよぶ双書を刊行して、現代社会の強い要請に応えたいと考えました。わたしたちは昭和21年以来、雑誌『自然』の刊行をつづけ、科学ジャーナリズムの確立と発展にいささかの力をつくしてきましたが、その実績をふまえて、さらに内外の新しい展開を摂取しつつ、この『自然選書』を真に充実した科学書のシリーズに育ててゆきたいと考えているのであります。

科学はしばしば、難解でしかも無味なものと考えられがちでありますが、十分な用意と適切な表現をもって提供された場合には、それはすべての人間に新鮮な知的刺戟を与え、生存の喜びを感じさせるものであることを、わたしたちは確信しています。そのような確信のもとに、高度の水準と視野の広さを保持しつつ、真に味読に値する科学書を刊行することが、わたしどもの念願であります。ご支援をお願いします。

中央公論社